ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3
«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450
Με την συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)

Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο)

Οδηγός για τον εκπαιδευτικό

«Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»

ΑΘΗΝΑ 2011

ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3

«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450

Με την συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)

Το παρόν έργο έχει παραχθεί στο πλαίσιο υλοποίησης της Πράξης «*ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη»,* με κωδικό MIS 295450 και ειδικότερα στο πλαίσιο του Υποέργου 1: «***Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και οδηγών για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων***» με ευθύνη του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή

Ο οδηγός του εκπαιδευτικού για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού ώστε να μπορέσει να υλοποιήσει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη φιλοσοφία του νέου προγράμματος σπουδών. Ο οδηγός δεν δίνει στον εκπαιδευτικό "συνταγές" για το τι θα κάνει στην τάξη του, αλλά προσπαθεί να τον βοηθήσει:

- να κατανοήσει τον εκπαιδευτικό προσανατολισμό του νέου ΠΣ και να αναγνωρίσει τις αλλαγές τόσο στο περιεχόμενο όσο και στις διδακτικές προσεγγίσεις που αυτό εισάγει,
- να σχεδιάζει τη διδασκαλία του αξιοποιώντας παραδείγματα δραστηριοτήτων και διδακτικών εργαλείων που του προτείνονται,
- να συνειδητοποιεί τις διδακτικές επιλογές του καθώς και το αποτέλεσμα που αυτές μπορούν να έχουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών,
- να αναγνωρίζει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε μαθηματική ενότητα και να τα συνδέει με αυτά που οι μαθητές αναμένεται να έχουν επιτύχει στις προηγούμενες τάξεις ή θα επιτύχουν στις επόμενες,
- να πειραματίζεται με νέες διδακτικές προσεγγίσεις δίνοντας του παραδείγματα διαχείρισης που θα επιτρέψουν την πραγματοποίηση των διδακτικών στόχων που διαμορφώνει με βάση το ΠΣ.

Για την επίτευξη των παραπάνω, παρουσιάζονται:

- οι βασικές αρχές του ΠΣ αναφορικά με το μαθηματικό περιεχόμενο, τη διδασκαλία και τη μάθηση,
- παραδείγματα εργαλείων αξιολόγησης που ανταποκρίνονται στις βασικές αρχές αξιολόγησης που θέτει το ΠΣ,
- η σημασία βασικών μαθηματικών θεμάτων ανά ηλικιακό κύκλο που έχουν επιλεγεί από το ΠΣ, η προηγούμενη και η επόμενη γνώση των μαθητών, οι δυσκολίες που σύμφωνα με την έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών αντιμετωπίζουν οι μαθητές καθώς και ζητήματα διδακτικής διαχείρισης,
- συγκεκριμένα παραδείγματα διδακτικής διαχείρισης δραστηριοτήτων που προτείνονται κυρίως στο ΠΣ δίνοντας έμφαση στις μαθηματικές διεργασίες που μπορούν να αναπτυχθούν,
- προτεινόμενες πηγές εκπαιδευτικού υλικού που μπορεί να αξιοποιηθεί.

Ο οδηγός του εκπαιδευτικού δεν αντικαθιστά το ΠΣ, αλλά δίνει μεγαλύτερη έμφαση σε ζητήματα που αφορούν το σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση της διδασκαλίας. Αυτό σημαίνει ότι ο οδηγός χρειάζεται να χρησιμοποιείται συμπληρωματικά με το ΠΣ. Τόσο το ΠΣ όσο και ο οδηγός υποστηρίζουν τον εκπαιδευτικό στο να μπορεί:

α) να προγραμματίζει την κατανομή του διδακτικού χρόνου,

β) να επιλέγει τη σειρά με την οποία θα διδάξει τις βασικές θεματικές ενότητες,

γ) να καθορίζει με τη βοήθεια του ΠΣ τους στόχους του και τα μέσα επίτευξης τους ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών, δ) να σχεδιάζει εργαλεία αξιολόγησης της επίτευξης των στόχων του με στόχο την ανατροφοδότηση και τη διαμόρφωση της διδασκαλίας,

ε) να επιλέγει ή να αναπτύσσει εκπαιδευτικό υλικό,

στ) να συνεργάζεται με άλλους εκπαιδευτικούς στο σχολείο του αλλά και εκτός ώστε να σχεδιάζει από κοινού, να ανταλλάσει ιδέες και να πειραματίζεται με διδακτικές προσεγγίσεις που αποδεικνύονται αποτελεσματικές.

Δομή του Οδηγού

Ο οδηγός περιλαμβάνει το γενικό μέρος που απευθύνεται στους εκπαιδευτικούς του Δημοτικού και του Γυμνασίου καθώς και ξεχωριστό ειδικό μέρος για κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα.

Στο γενικό μέρος παρουσιάζονται:

- οι βασικές αρχές μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών σύμφωνα με το ΠΣ εστιάζοντας κυρίως στο τι είναι καινούριο στο ΠΣ,
- η δομή του μαθηματικού περιεχομένου σύμφωνα με τις τροχιές μάθησης και διδασκαλίας που αξιοποιήθηκαν στο ΠΣ,
- εργαλεία – παραδείγματα αξιολόγησης.

Οι αρχές μάθησης και διδασκαλίας παρουσιάζονται συνοπτικά δίνοντας έμφαση περισσότερο σε ζητήματα διαχείρισης, τα οποία συγκεκριμενοποιούνται στο ειδικό μέρος. Σχετικά με τις τροχιές μάθησης και διδασκαλίας παρουσιάζονται συνοπτικά οι κύριες υποτροχιές εστιάζοντας στο τι είναι αυτό που διαφοροποιείται ανά ηλικιακό κύκλο. Στην αξιολόγηση προτείνονται: τρόποι αξιολόγησης των απαντήσεων των μαθητών σε μια δραστηριότητα με βάση το βαθμό επίτευξης των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ), τεχνικές αξιολόγησης όπως πορτφόλιο, συνέντευξη, παρατήρηση με αντίστοιχα παραδείγματα, καθώς και ένα παράδειγμα αξιολόγησης συνθετικής εργασίας των μαθητών.

Στο ειδικό μέρος της κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας έχουν επιλεγεί κάποιες βασικές ενότητες ως προς τις οποίες παρουσιάζονται:

- η σημασία της ενότητας εστιάζοντας στις βασικές μαθηματικές έννοιες που τη χαρακτηρίζουν, καθώς και στη μαθηματική δραστηριότητα που ενθαρρύνεται από το ΠΣ σχετικά με την ενότητα αυτή,
- η προηγούμενη και η επόμενη γνώση των μαθητών όπως αυτή προτείνεται από το ΠΣ σχετικά με την ενότητα,
- οι δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σχετικά με την ενότητα όπως αυτές προκύπτουν κυρίως από τη σχετική έρευνα,
- προτάσεις διδακτικής διαχείρισης της ενότητας,
- ιδέες διδακτικής διαχείρισης παραδειγμάτων ενδεικτικών δραστηριοτήτων που προτείνονται στο ΠΣ ή συμπληρωματικών.

Σε κάποιες περιπτώσεις προτείνεται εκπαιδευτικό υλικό ανά ενότητα που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός καθώς και προτάσεις – παραδείγματα διαχείρισης συνθετικών εργασιών.

Βασικές Αρχές Μάθησης και Διδασκαλίας των Μαθηματικών

Μαθηματικά και Μαθηματικός γραμματισμός

Κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: της γενίκευσης, της αφαίρεσης, της ακρίβειας και της συντομίας, καθώς και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Παράλληλα, η διδασκαλία επιδιώκει τη σύνδεση των παραπάνω με το κοινωνικό περιβάλλον, γεγονός που οδηγεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού, δηλαδή στην ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και στον κόσμο γύρω του, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και να αντιλαμβάνεται τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων. Το ΠΣ επιδιώκει κυρίως να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων, καθώς και να διαμορφώσουν μια θετική στάση για τα μαθηματικά, εκτιμώντας το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.

Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται, όπως αναλύεται στο ΠΣ, να επιτευχθεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες:

α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας,

β) της δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών,

γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων, και

δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας, όπου ο μαθητής σκέφτεται πάνω στις δράσεις του και ελέγχει την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών του.

Η ανάπτυξη αυτών των διεργασιών από τον μαθητή εξαρτάται από το είδος του προβλήματος/ δραστηριότητας που θέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές, αλλά και από την αλληλεπίδραση των μαθητών και του εκπαιδευτικού στην τάξη. Για παράδειγμα, μια άσκηση της μορφής «Λύστε την εξίσωση» δεν ενθαρρύνει τις ίδιες διεργασίες με ένα πρόβλημα που μοντελοποιείται από μια εξίσωση. Επιπλέον, αν ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές του να περιγράψουν, να επεξηγήσουν και να τεκμηριώσουν τις λύσεις τους σε ένα πρόβλημα, μπορεί να τους υποστηρίξει να αναπτύξουν κάποιες από τις παραπάνω διεργασίες.

Εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης

Δραστηριότητες

Τα βασικά εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης που υποστηρίζει το ΠΣ είναι η χρήση, από τους ίδιους τους μαθητές στην τάξη, δραστηριοτήτων, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν στην εισαγωγή μαθηματικών εννοιών, στην αναγνώριση μαθηματικών ιδιοτήτων και δομών, στη μοντελοποίηση καταστάσεων με την αξιοποίηση μαθηματικών εργαλείων και γενικότερα στη μαθηματική διερεύνηση. Το πέρασμα από τη δραστηριότητα στο μαθηματικό αντικείμενο είναι ένα δύσκολο σημείο που χρειάζεται να διαχειριστεί ο εκπαιδευτικός ώστε να μπορέσει ο μαθητής να κάνει τις ανάλογες συνδέσεις ανάμεσα στο πλαίσιο που θέτει η δραστηριότητα και στο μαθηματικό περιεχόμενο. Η διαρκής αναφορά του μαθητή στο πλαίσιο της δραστηριότητας που έχει να λύσει σε όλη την πορεία επίλυσής της βοηθά στο πέρασμα αυτό. Συχνά, η παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου απευθείας από τον εκπαιδευτικό καταστρατηγεί την αρχή της ανακάλυψής του από τους μαθητές και μετατρέπει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών σε τετριμμένη. Η παρουσίαση από τον εκπαιδευτικό του μαθηματικού μοντέλου συχνά μετατρέπει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών σε τετριμμένη. Η συνεργασία των μαθητών στην τάξη, η συζήτηση τόσο στο πλαίσιο μικρών ομάδων όσο και σε ολόκληρη την τάξη επιτρέπει στους μαθητές να διατυπώσουν, να επεξηγήσουν και να τεκμηριώσουν τις σκέψεις τους. επίσης, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να υποστηρίζει τη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών που αναδεικνύονται στη δραστηριότητα και να μην περιορίζεται στη συνεχή εξάσκηση.

Χειραπτικά εργαλεία

Συχνά, η μαθηματική διερεύνηση γίνεται μέσα από τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Το ΠΣ και ο οδηγός προτείνουν την αξιοποίηση τέτοιων εργαλείων και δίνουν κάποια παραδείγματα αξιοποίησής τους στη διδασκαλία. Τα εργαλεία αυτά επιτρέπουν στους μαθητές να πειραματιστούν, να κάνουν εικασίες, να ανακαλύψουν μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες και συχνά να εντοπίσουν ακόμα και βασικές ιδέες που θα τους οδηγήσουν στην τεκμηρίωση των εικασιών τους με μαθηματικά εργαλεία. Το πέρασμα από τον εμπειρικό-διαισθητικό τρόπο σκέψης που επιτρέπουν τα εργαλεία στον τυπικό δεν γίνεται αυτόματα και απαιτεί οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία, μέσα από συζήτηση, να κάνουν αυτές τις συνδέσεις. Τα χειραπτικά εργαλεία που αξιοποιούνται στο ΠΣ είναι δομημένα (π.χ. Dienes blocks για τη διδασκαλία του θεσιακού συστήματος), ημι-δομημένα (π.χ. τα algebra tiles για τις πράξεις των ακεραίων) ή μη δομημένα (π.χ. γεωπίνακες για την κατασκευή και σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων). Ακόμα και η χρήση τους μπορεί να διαφέρει ως προς τη μαθηματική δράση που υποστηρίζουν. Για παράδειγμα, το χειραπτικό υλικό μπορεί να είναι ένα μοντέλο αναπαράστασης μιας διαδικασίας (π.χ. το μοντέλο της ζυγαριάς ή τα algebra tiles), ένα μέσο διερεύνησης μιας σχέσης (π.χ. τα geostrips για τη διερεύνηση της σχέσης εμβαδόν – περίμετρος) ή ακόμα πιο παραδοσιακής μορφής εργαλεία (διαβήτης, όργανα μέτρησης) που χρησιμοποιούνται στη γεωμετρία για σχεδιασμό, κατασκευή, σύγκριση γεωμετρικών αντικειμένων. Επίσης, η κατάλληλη χρήση του υπολογιστή τσέπης επιτρέπει τη μαθηματική διερεύνηση και τον πειραματισμό. Τέλος, μια σειρά από αναπαραστασιακά εργαλεία (π.χ. διάφορες μορφές αριθμογραμμής [κενή, διπλή κ.λπ.], μήκη, γεωμετρικά σχήματα) μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αποδώσουν νόημα σε έννοιες και διαδικασίες. Το κάθε χειραπτικό και αναπαραστασιακό υλικό έχει δυνατότητες και περιορισμούς και προσομοιώνει μαθηματικές έννοιες, ιδιότητες και διαδικασίες. Αυτό είναι πολύ δύσκολο να γίνει αντιληπτό ακόμα και από μαθητές του Γυμνασίου. Η εναλλαγή χειραπτικών υλικών για το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και η συζήτηση πάνω στις ομοιότητες και στις διαφορές τους μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις μαθηματικές οντότητες και στις αναπαραστάσεις τους. Επίσης, καθημερινά αντικείμενα από το περιβάλλον των μαθητών μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα στους μαθητές να συνδέσουν την άτυπη με την τυπική γνώση.

Ψηφιακά εργαλεία

Η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών υποστηρίζει την έμφαση που δίνεται στο ΠΣ στην εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες, διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και επίλυση προβλήματος μέσα από τη χρήση εξειδικευμένων λογισμικών για μαθηματική διερεύνηση και εργαλείων κοινωνικού λογισμικού για συλλογική διαπραγμάτευση και συνεργασία.

Τα ψηφιακά εργαλεία που προτείνονται στο ΠΣ χρησιμοποιούνται ως εργαλεία έκφρασης και οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες, ανάλογα με το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας και τον τρόπο χρήσης της υφιστάμενης τεχνολογίας. Αυτές είναι: η μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού, ο δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων, η αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα, η διερεύνηση και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες και ο πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα. Τα εργαλεία αυτά αξιοποιούνται με συνδυασμό μεικτής και διακριτής παρέμβασης σε δύο επίπεδα:

(α) επιλεκτικά με τη μορφή *μικροπειραμάτων* που ενσωματώνονται σε διαφορετικά σημεία της ύλης και μπορεί να συνδέονται είτε με ορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες είτε με δραστηριότητες και ασκήσεις των σχολικών βιβλίων,

(β) ως βασικό υλικό αναφοράς σε *συνθετικές εργασίες* για το σχεδιασμό και την προετοιμασία μαθητικών δραστηριοτήτων, αλλά και για μαθηματική διερεύνηση.

Τα μικροπειράματα εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις και η βασική χρήση τους από μαθητές προβλέπει δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων ώστε συμπεριφορές, σχέσεις και ιδιότητες να γίνονται αντικείμενο προβληματισμού, διερεύνησης και διαπραγμάτευσης (τι μένει σταθερό και τι αλλάζει, καθώς μετεξελίσσονται τα μαθηματικά αντικείμενα). Για παράδειγμα, με αφετηρία μια δραστηριότητα – άσκηση του σχολικού βιβλίου, ένα μικροπείραμα μπορεί να στοχεύει στην επεξήγηση μιας έννοιας ή στην απαραίτητη εμβάθυνση για την κατανόησή της από τους μαθητές. Έτσι, το κάθε μικροπείραμα μπορεί να καλύπτει μια έννοια στενά ή σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πεδίο όπου εμπλέκονται συνδεδεμένες μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα, σε μια δραστηριότητα κατασκευής της περιμέτρου ενός τριγώνου με ένα εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας (μέσω τομής κύκλων) περιλαμβάνονται στοιχεία που αφορούν τον τρόπο κατασκευής ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου, αλλά και αναγκαίες συνδέσεις με γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τις ιδιότητες του κύκλου. Τα μικροπειράματα σε κάποιες περιπτώσεις βασίζονται στη χρήση έτοιμων εφαρμογών (applets) από έγκυρες ιστοσελίδες. Αυτό συμβαίνει κυρίως στους κύκλους Α και Β όπου η πλαισίωση των μαθηματικών εννοιών με μοντέλα και καταστάσεις απαιτεί μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων και σχέσεων. Με αυτό τον τρόπο επιδιώκεται η ενίσχυση των ευκαιριών μάθησης των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές.

Τα μικρο-πειράματα λοιπόν προορίζονται για χειρισμό από το μαθητή (εξατομικευμένα ή σε συνεργασία σε ομάδα) με δια ζώσης διδακτική υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό, ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατά την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία με χρήση διαδραστικού πίνακα ως μέσα επεξήγησης εννοιών, αλλά και ως μέσα για σχεδιασμό μιας διευρυμένης μαθηματικής διερεύνησης ενώπιον όλης της τάξης. Τα μικροπειράματα είναι σχεδιασμένα ώστε οι όποιες απαντήσεις των μαθητών να αφήνουν πεδίο παρέμβασης στον εκπαιδευτικό και αφορμές για διενέργεια συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης (π.χ. μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος ή εύρεσης μιας απάντησης, γενίκευση της λύσης, ερμηνεία αποτελεσμάτων και συμπεριφορών μαθηματικών αντικειμένων).

Συνθετικές εργασίες

Στο Πρόγραμμα Σπουδών προτείνεται η διαχείριση 10 ωρών διδασκαλίας από τον προβλεπόμενο ανά σχολικό έτος χρόνο για να εργαστούν οι μαθητές σε συνθετικές εργασίες. Η συνθετική εργασία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν με μια πιο εκτεταμένη δραστηριότητα που συνδέεται με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα, καθώς και με καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Στην περίπτωση των συνθετικών εργασιών με αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων η έμφαση δίνεται στη δυνατότητα που παρέχουν στους μαθητές να εμπλακούν βαθύτερα σε μαθηματικές δραστηριότητες, να κατασκευάσουν και να επεξεργαστούν ψηφιακά μαθηματικά αντικείμενα, συμπεριφορές και σχέσεις μέσα από το χειρισμό αλληλοσυνδεόμενων αναπαραστάσεων για ένα σύνολο διδακτικών ωρών. Στο επίκεντρο κάθε συνθετικής εργασίας βρίσκεται η συνεργασία μεταξύ των μαθητών (συχνά σε ομάδες) για τη διερεύνηση ενός θέματος ή για τη λύση ενός προβλήματος στο οποίο εμπλέκονται τα μαθηματικά και αναδεικνύονται ως εργαλείο που ευνοεί τη διερεύνηση καθαυτή, τη διαπραγμάτευση και την ερμηνεία. Έτσι, ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να σχεδιάσει διερευνήσεις που αναδεικνύουν συνδέσεις εντός των μαθηματικών (π.χ. διερεύνηση με άξονα ένα μαθηματικό θέμα) ή εκτός των μαθηματικών (π.χ. μαθηματικά και πολιτισμός, μαθηματικά στο πλαίσιο πραγματικών καταστάσεων). Σε κάθε περίπτωση, οι προτεινόμενες συνθετικές εργασίες δεν προτείνεται να ειδωθούν ως αντικείμενα υλικού προς επεξήγηση στους μαθητές, αλλά να λειτουργήσουν ως γεννήτορες ιδεών για τη δημιουργική εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό νέων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων προς διερεύνηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών του ΠΣ από τους μαθητές. Μέρος ή το σύνολο των συνθετικών εργασιών που βασίζονται στη χρήση ψηφιακών εργαλείων προτείνεται να εφαρμοστούν στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου.

Μαθηματικό Περιεχόμενο: Τροχιές Μάθησης και Διδασκαλίας

Όπως έχουμε παρουσιάσει στο ΠΣ η ανάπτυξη του περιεχομένου έγινε με βάση την έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας» εστιάζοντας σε μια εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων κατά τη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν αυτήν την πορεία και τους βασικούς σταθμούς της και οργανώνουν τη δραστηριοποίηση των παιδιών με αναφορά σε αυτήν, μπορούν να δημιουργήσουν περιβάλλοντα μάθησης που να στηρίξουν αποτελεσματικά την επιτυχή μαθητεία του μαθητή στα μαθηματικά (Clements & Sarama, 2009)[1]. Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εξαιρετικά σημαντική η έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, η οποία υποδεικνύει τους εκάστοτε

[1] Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach.* New York & London: Routledge.

στόχους μάθησης, την αφετηρία εκκίνησης, πώς και πού μετακινείσαι κάθε φορά και πώς επιτυγχάνεις, τελικά, το στόχο μάθησης που είχε αρχικά τεθεί.

Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία.

Οι βασικές θεματικές περιοχές όπου αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι: Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος – Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά. Οι περιοχές αυτές εμφανίζονται σε όλους τους ηλικιακούς κύκλους αναδεικνύοντας, στις μικρότερες τάξεις, άτυπους και διαισθητικούς τρόπους σκέψης, οι οποίοι γίνονται περισσότερο τυπικοί προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που περιγράφονται για την κάθε τάξη θα ήταν ιδανικό να επιτευχθούν από όλους τους μαθητές. όμως, στην πραγματικότητα, ο βαθμός επίτευξης του κάθε μαθησιακού αποτελέσματος θα διαφέρει για τον κάθε μαθητή. Η γνώση από τον εκπαιδευτικό των διαφόρων επιπέδων ανάπτυξης θα τον βοηθήσει στη διαμόρφωση κατάλληλων παρεμβάσεων με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη όλων των μαθητών. Στη συνέχεια, περιγράφονται σύντομα τα βασικά χαρακτηριστικά των τροχιών μάθησης για την κάθε βασική θεματική περιοχή και για κάθε ηλικιακό κύκλο (Α’ κύκλος –νηπιαγωγείο, Α΄ και Β΄ δημοτικού, Β΄ κύκλος - Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού, Γ΄ κύκλος – Γυμνάσιο) και δίνονται κάποια παραδείγματα ανάπτυξης κατά τη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Αριθμοί – Άλγεβρα

Περιγράφονται παρακάτω οι τροχιές για τη θεματική «αριθμός» και για τη θεματική «άλγεβρα». Επιπλέον, στο τέλος της σχετικής περιγραφής, δίνεται ένα παράδειγμα ανάπτυξης μιας τροχιάς για καθεμία από τις δύο θεματικές.

Αριθμός

Η θεματική «αριθμός» αναπτύσσεται σε έξι τροχιές - φυσικός αριθμός, κλασματικός αριθμός, δεκαδικός αριθμός/ ποσοστά, ακέραιος αριθμός, ρητός αριθμός, άρρητος/ πραγματικός αριθμός-, οι οποίες παρουσιάζονται, στη συνέχεια, με τη συγκεκριμένη σειρά.

Σε καθεμία από τις τροχιές της συγκεκριμένης θεματικής μπορεί κανείς να διακρίνει δύο υπο-τροχιές. Η πρώτη αφορά σε μάθηση που συνδέεται με την έννοια του εκάστοτε αριθμού και του αντίστοιχου συνόλου αριθμών, ενώ η δεύτερη αναφέρεται σε μάθηση που σχετίζεται με τις πράξεις στο αντίστοιχο σύνολο. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι υπο-τροχιές κάθε τροχιάς, οι υπο-τροχιές διαφορετικών τροχιών, αλλά και οι διαφορετικές τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και συχνά ενοποιούνται, δράση που δεν είναι πάντοτε εύκολο να ανιχνευτεί και να περιγραφεί με σαφήνεια.

Παρακάτω, για κάθε τροχιά της θεματικής «αριθμός», περιγράφονται οι δύο υπο-τροχιές και, ειδικότερα, οι σημαντικοί σταθμοί, τα ορόσημά τους. Επιπλέον, υποδεικνύεται η εξέλιξη των δύο υπο-τροχιών στους τρεις ηλικιακούς κύκλους. Στο τέλος της ενότητας παρατίθεται ως παράδειγμα η σχηματική ανάπτυξη μιας υπο-τροχιάς για την έννοια του κλάσματος και το σύνολο των κλασματικών αριθμών.

α. Τροχιά «φυσικός αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα στην πορεία ανάπτυξης
Φυσικός αριθμός & το σύνολο των φυσικών αριθμών	• Αναγνώριση φυσικών αριθμών σε μια ποικιλία από πλαίσια και με τη χρήση διάφορων στρατηγικών. • Αναπαράσταση φυσικών αριθμών (με φυσικά αντικείμενα, με εικόνες, λεκτικά, ως σημεία στην ευθεία, με ψηφία/ σύμβολα). • Αρίθμηση και απαρίθμηση και αναπαράσταση των σχετικών διαδικασιών με διαφορετικούς τρόπους. • Σύγκριση και διάταξη φυσικών αριθμών. • Ανάλυση και σύνθεση φυσικών αριθμών με διαφορετικούς τρόπους (αξία θέσης ψηφίου). • Διάκριση φυσικών από άλλους αριθμούς.
Πράξεις στους φυσικούς αριθμούς	• Αναγνώριση και των τεσσάρων πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους/ στρατηγικές (νοερά, προφορικά και γραπτά). • Εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους/ στρατηγικές (νοερά, προφορικά και γραπτά). • Αναγνώριση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων και της σχέσης μεταξύ τους. • Αξιοποίηση των τεσσάρων πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων. • Επικοινωνία των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. • Ανάπτυξη μεθόδων αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των πράξεων.

Αναφορικά με την εξέλιξη των δύο υπο-τροχιών ανά ηλικιακό κύκλο, ισχύουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

Α΄ κύκλος: Οι μαθητές εργάζονται στην πρώτη χιλιάδα και σε μια ποικιλία από πλαίσια. Αναφορικά με τον αριθμό και το σύνολο των φυσικών αριθμών, η εργασία στην τάξη εστιάζεται στην αναγνώριση (άμεση και μέσω αντιστοίχισης), στην ανάγνωση (προφορική και γραπτή) και στην αναπαράσταση φυσικών αριθμών (με φυσικά υλικά, εικόνες, λέξεις, σύμβολα και στην ευθεία). Επιπλέον, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αποκτήσουν εμπειρίες και ευχέρεια στη σύνθεση και στην ανάλυση φυσικών αριθμών, αλλά και στη σύγκριση και στη διάταξή τους. Τέλος, να αναπτύξουν δεξιότητες και ικανότητες αρίθμησης και απαρίθμησης.

Σχετικά με τις πράξεις στους φυσικούς αριθμούς, η έμφαση βρίσκεται στην κατανόηση των τεσσάρων πράξεων και στην αναγνώριση, αναπαράσταση και εφαρμογή τους σε μια ποικιλία από καταστάσεις. Επιπλέον, οι μαθητές εμπλέκονται σε καταστάσεις εκτίμησης και υπολογισμού του αποτελέσματος αριθμητικών παραστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ακόμη, ενθαρρύνονται να αναπτύσσουν και να αξιοποιούν στρατηγικές νοερών υπολογισμών, άτυπες και τυπικές διαδικασίες εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων (πολλαπλασιαστής έως διψήφιος και διαιρέτης μονοψήφιος) και να διερευνούν τη σχέση μεταξύ των τεσσάρων πράξεων. Τέλος, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων (έως δύο πράξεων), να τις τεκμηριώνουν και να ελέγχουν τη 'λογικότητα' της λύσης.

Β΄ κύκλος: Η μαθησιακή δράση του πρώτου κύκλου επεκτείνεται, πλέον, στους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1 τρις. Οι σχετικές δραστηριότητες στοχεύουν στη συστηματοποίηση της αντίστοιχης σκέψης των μαθητών, ώστε να οδηγηθούν προοδευτικά στην κατανόηση των δομικών και των λειτουργικών χαρακτηριστικών του συνόλου των φυσικών αριθμών. Σε αυτήν την κατεύθυνση, προσφέρονται στους μαθητές κάποιες επιπλέον μαθησιακές εμπειρίες, όπως η έννοια της θετικής δύναμης φυσικών αριθμών, η παρένθεση στις αριθμητικές παραστάσεις και η χρήση της αριθμομηχανής για τη διευκόλυνση της ουσιαστικής μαθηματικής σκέψης (συνήθως μετά τη Γ΄ τάξη). Ακόμη, καλούνται οι μαθητές να θέτουν και να διερευνούν ερωτήματα σχετικά με τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (αναγνώριση της Ευκλείδειας διαίρεσης και των κριτηρίων διαιρετότητας), αλλά και τη σχέση των φυσικών με τους άλλους αριθμούς.

Γ΄ κύκλος: Η μάθηση και η διδασκαλία που αφορά στους φυσικούς αριθμούς σε αυτόν τον κύκλο επικεντρώνεται, πλέον, στη μελέτη από τους μαθητές των χαρακτηριστικών του συνόλου των φυσικών αριθμών και στη σχέση του με τα άλλα σύνολα αριθμών

β. Τροχιά «κλασματικός αριθμός»

Υπο-τροχιές	**Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης**
Κλασματικός αριθμός & το σύνολο των κλασματικών αριθμών	• Χωρισμός διακριτών και συνεχών ποσοτήτων σε ίσα μέρη, διερεύνηση και περιγραφή της μεταξύ τους σχέσης. • Αναγνώριση, αναπαράσταση και διαφορετικές ερμηνείες της σχέσης μέρους/ όλου. • Αναγνώριση, διερεύνηση, αναπαράσταση και κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων. • Σύγκριση κλασματικών αριθμών. • Διερεύνηση της σχέσης κλασματικών και φυσικών αριθμών.
Πράξεις στους κλασματικούς αριθμούς	• Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους. • Αναγνώριση και διερεύνηση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με κλάσματα. • Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση πράξεων με

κλάσματα και φυσικούς αριθμούς.

- Αξιοποίηση των πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων.
- Επικοινωνία σχετικά με τις στρατηγικές επίλυσης.
- Ανάπτυξη μεθόδων/ στρατηγικών αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των πράξεων με κλάσματα.

Η εξέλιξη των δύο υπο-τροχιών ανά κύκλο έχει ως εξής:

Α΄ κύκλος: Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες σύγκρισης εμπράγματων ποσοτήτων, διακριτών και συνεχών, βρίσκουν τη σχέση μεγέθους τους και την περιγράφουν λεκτικά. Ακόμη, εισάγονται στη συμβολική γραφή απλών κλασμάτων (π.χ., ½, 1/3, 2/3, ¼, 2/4…).

Β΄ κύκλος: Οι δραστηριότητες του πρώτου κύκλου επαναλαμβάνονται, αλλά περιλαμβάνουν, πλέον, και εικονικές και συμβολικές ποσότητες, ενώ στα ανάγωγα κλάσματα προστίθενται, προοδευτικά, καταχρηστικά και μικτά. Επιπλέον, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αναπαραστήσουν την ίδια σχέση μεγεθών με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις, να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα σε δύο ανάγωγα (π.χ., μεταξύ 2/3 και ¾) και να συγκρίνουν κλάσματα με διαφορετικούς τρόπους. Για τη σύγκριση και τη διάταξη κλασμάτων, ακολούθως, οι μαθητές εισάγονται στη διαδικασία μετατροπής τους σε ομώνυμα (κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων) με τη χρήση του ΕΚΠ. Τέλος, εισάγονται στην έννοια του κλάσματος ως αριθμού, αλλά και στην έννοια του λόγου.

Αναφορικά με τις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, αρχικά, οι μαθητές προσθέτουν και αφαιρούν ομώνυμα, απλά ετερώνυμα, οποιαδήποτε ανάγωγα και καταχρηστικά κλάσματα, με αυτήν τη σειρά. Ακολούθως, ασχολούνται με τον πολλαπλασιασμό και συνεχίζουν με τη διαίρεση (αρχικά, μεταξύ φυσικών και κλασματικών αριθμών και, στη συνέχεια, μεταξύ κλασματικών αριθμών). Και για τις τέσσερις πράξεις, αξιοποιούνται και ενθαρρύνονται διάφορες μέθοδοι/ στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος. Ακόμη, οι μαθητές διερευνούν την ισχύ των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με φυσικούς και στην περίπτωση των κλασματικών αριθμών. Τέλος, εισάγονται στα ποσοστά, μετατρέπουν κλασματικούς αριθμούς σε ποσοστά και τα χρησιμοποιούν στη μοντελοποίηση καταστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.

Γ΄ κύκλος: Δεν υπάρχει εργασία αποκλειστικά εστιασμένη σε κλασματικούς αριθμούς.

γ. Τροχιά «δεκαδικός αριθμός»

Υπο-τροχιές	**Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης**
Δεκαδικός αριθμός και το σύνολο των δεκαδικών	• Αναγνώριση δεκαδικών αριθμών σε μια ποικιλία από καθημερινά και άλλα πλαίσια. • Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και ποσοστά και αντιστρόφως. • Αναγνώριση και αξιοποίηση της αξίας της έννοιας του

αριθμών	ποσοστού στην αντιμετώπιση καθημερινών καταστάσεων. • Στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών.
Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς	• Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς. • Έλεγχος της ‘λογικότητας’ του αποτελέσματος των πράξεων με δεκαδικούς, με τη χρήση εκτιμήσεων. • Αξιοποίηση των δεκαδικών αριθμών, των ποσοστών, των σχετικών πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων. • Ανάπτυξη μεθόδων αξιολόγησης του αποτελέσματος των πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς.

Οι τροχιά μάθησης για τους δεκαδικούς αριθμούς αναπτύσσεται ως ακολούθως σε κάθε κύκλο:

Α΄ κύκλος: Οι μαθητές, μέσω πρακτικών δραστηριοτήτων, εισάγονται στη γραφή και στην ανάγνωση δεκαδικών αριθμών, καθώς και στην (κυρίως προσεγγιστική) τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή.

Β΄ κύκλος: Αναφορικά με την έννοια του δεκαδικού αριθμού και το αντίστοιχο σύνολο, οι μαθητές μελετούν τα δεκαδικά κλάσματα ως ειδική περίπτωση κλασμάτων (αρχικά με παρονομαστή το 10 και το 100 και αργότερα οποιαδήποτε θετική δύναμη του 10), εισάγονται στο δεκαδικό συμβολισμό και αναγνωρίζουν ότι κάθε δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο δεκαδικό μέρος είναι ένα κλάσμα. Επιπλέον, διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς και τους τοποθετούν στην αριθμογραμμή. Τέλος, στρογγυλοποιούν έναν αριθμό με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία στον πλησιέστερο ακέραιο ή στην πλησιέστερη δεκάδα.

Σε ότι αφορά στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να προσθέτουν και να αφαιρούν δεκαδικούς αριθμούς, νοερώς μέχρι και δύο δεκαδικά ψηφία και γραπτώς με ένα, δύο και περισσότερα δεκαδικά ψηφία, με αυτήν τη σειρά. Αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, στις πρώτες σχετικές εμπειρίες των μαθητών, πολλαπλασιαστής και διαιρέτης είναι μονοψήφιοι φυσικοί, ενώ, στη συνέχεια, είναι δεκαδικοί με ένα δεκαδικό ψηφίο, με δύο δεκαδικά ψηφία, κ.ο.κ. Και για τις τέσσερις πράξεις, ενθαρρύνονται και αξιοποιούνται διάφορες μέθοδοι/ στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος. Ακόμη, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές, για να ελέγχουν αν το αποτέλεσμα των πράξεων είναι λογικό, καθώς και την αριθμομηχανή για να επιτρέψουν στη σκέψη να ασχοληθεί περισσότερο με τα μη υπολογιστικά «συστατικά» της μαθηματικής γνώσης.

Γ΄ κύκλος: Δεν υπάρχει εργασία εστιασμένη αποκλειστικά στους δεκαδικούς αριθμούς.

δ. Τροχιά «ακέραιος αριθμός»

Υπο-τροχιές	**Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης**
Ακέραιος αριθμός και το σύνολο των ακέραιων αριθμών	• Διαισθητική αντίληψη των ακέραιων αριθμών μέσω μιας ποικιλίας από καθημερινές καταστάσεις. • Αναγνώριση και αναπαράσταση ακέραιων αριθμών σε διαφορετικά πλαίσια. • Σύγκριση και διάταξη ακέραιων αριθμών με τη χρήση της αριθμογραμμής. • Αναγνώριση και αξιοποίηση της ιδιότητας των αντίθετων ακεραίων.
Πράξεις με ακέραιους αριθμούς	• Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς, με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων. • Αναγνώριση και διερεύνηση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς. • Αξιοποίηση των ακέραιων αριθμών, των πράξεων στο αντίστοιχο σύνολο και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση μαθηματικών και καθημερινών προβλημάτων (μοντελοποίηση).

Τα ορόσημα της ανάπτυξης των υπο-τροχιών στους τρεις ηλικιακούς κύκλους της υποχρεωτικής εκπαίδευσης έχουν ως εξής:

Α΄ κύκλος: Δεν προβλέπεται εργασία σχετική με τους ακέραιους αριθμούς.

Β΄ κύκλος: Στο συγκεκριμένο κύκλο επιχειρείται μια πρώτη αισθητοποίηση της έννοιας των ακεραίων αριθμών από τους μαθητές. Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν διαισθητικά τη σχετική έννοια, μέσα από καθημερινές καταστάσεις, να συνειδητοποιήσουν την ανάγκη επέκτασης της αριθμογραμμής, να διατάξουν ακέραιους αριθμούς με πλαίσιο αναφοράς την αριθμογραμμή και να διερευνήσουν διαισθητικά απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις με ακέραιους αριθμούς.

Γ΄ κύκλος: Πρόκειται για την περίοδο της πλήρους ανάπτυξης της σχετικής έννοιας. Οι μαθητές αναγνωρίζουν και αναπαριστούν ακέραιους σε διαφορετικά πλαίσια, διερευνούν τη σχέση διάταξης στο σύνολο των ακεραίων (κάθε ακέραιος έχει επόμενο) και τη σχέση του συνόλου των ακεραίων με το σύνολο των φυσικών αριθμών και, τέλος, αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ακεραίων αριθμών ως την απόστασή τους από το 0.

Αναφορικά με τις πράξεις, οι μαθητές αναπτύσσουν κατανόηση των εννοιών των τεσσάρων πράξεων με ακεραίους αριθμούς και των ιδιοτήτων τους. Επιπλέον, αναγνωρίζουν, αναπαριστούν και εκτελούν τις τέσσερις πράξεις και αξιοποιούν τη γνώση τους για αυτές ώστε να διαχειριστούν μαθηματικά προβλήματα (π.χ., αριθμητικός λογισμός παραστάσεων), αλλά και καθημερινές καταστάσεις (π.χ., μοντελοποίηση).

στ. Τροχιά «ρητός αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Ρητός αριθμός και το σύνολο των ρητών αριθμών	• Αναγνώριση της έννοιας του ρητού αριθμού και, ειδικότερα, της σχέσης του με τους υπόλοιπους αριθμούς. • Σύγκριση και διάταξη ρητών αριθμών και διερεύνηση της ιδιότητας της 'πυκνότητας', με τη χρήση της ευθείας των αριθμών.
Πράξεις με ρητούς αριθμούς	• Διερεύνηση της επέκτασης της ισχύος όσων είναι γνωστά για τους αριθμούς (φυσικούς, κλασματικούς και ακεραίους) και για τις πράξεις τους στους ρητούς αριθμούς.

Η συγκεκριμένη τροχιά εμφανίζεται στο Γυμνάσιο (τρίτος ηλικιακός κύκλος). Όμως, οι εμπειρίες των μαθητών με τα διάφορα σύνολα αριθμών κατά τους προηγούμενους δύο κύκλους αναμένεται να έχουν συμβάλει στη συγκρότηση ενός επαρκούς γνωστικού κεφαλαίου και μιας μαθηματικής υποδομής με σαφή επιστημολογικά χαρακτηριστικά που αφορούν σε αριθμούς (έννοια, ιδιότητες, χαρακτηριστικά του αντίστοιχου συνόλου και πράξεις σε αυτό), που επιτρέπουν την επέκταση της αντίστοιχης μαθηματικής σκέψης, ενδεχομένως με κατάλληλους μετασχηματισμούς, στο διευρυμένο σύνολο των ρητών αριθμών.

Ειδικότερα, στο πλαίσιο της συγκεκριμένης τροχιάς, οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν, αρχικά, το κλάσμα ως αναπαράσταση του αποτελέσματος της διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών και τα ισοδύναμα κλάσματα ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αποτελέσματος. Στη συνέχεια, ορίζουν το σύνολο των ρητών (μετά τον ορισμό των ακεραίων), συγκρίνουν και διατάσσουν ρητούς αριθμούς και ορίζουν τη θέση τους στην αριθμογραμμή, διακρίνουν και διερευνούν τις έννοιες του λόγου και των αναλογιών και τις αξιοποιούν στη μοντελοποίηση καταστάσεων. Τέλος, αναγνωρίζουν, διερευνούν και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων με ρητούς αριθμούς (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική, ο ρόλος του 1, ο ρόλος του 0).

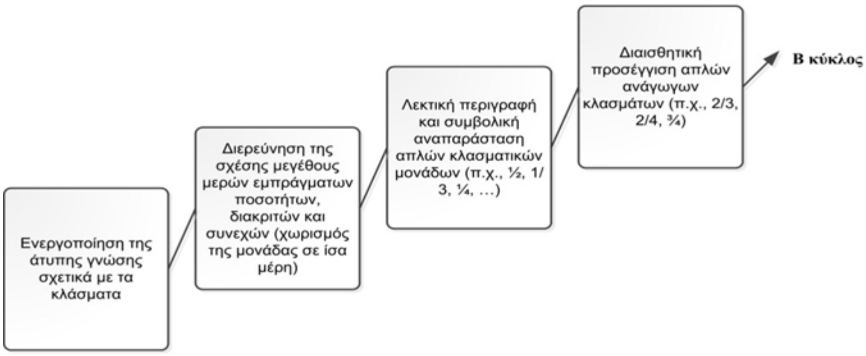
ζ. Τροχιά «άρρητος και πραγματικός αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Άρρητος και πραγματικός αριθμός - το σύνολο των άρρητων και των πραγματικών αριθμών	• Αναγνώριση της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού και αξιοποίησή της στην επίλυση προβλημάτων. • Διάκριση των άρρητων από τους ρητούς και αναγνώριση της σχέσης τους με τους υπόλοιπους αριθμούς. • Ορισμός των πραγματικών αριθμών, αναπαράστασή τους στην ευθεία, σύγκριση και διάταξή τους.
Πράξεις με άρρητους και πραγματικούς αριθμούς	• Διερεύνηση της επέκτασης της ισχύος όσων είναι γνωστά για τους αριθμούς και τις πράξεις τους στους πραγματικούς αριθμούς, με έμφαση στην ιδιότητα της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών.

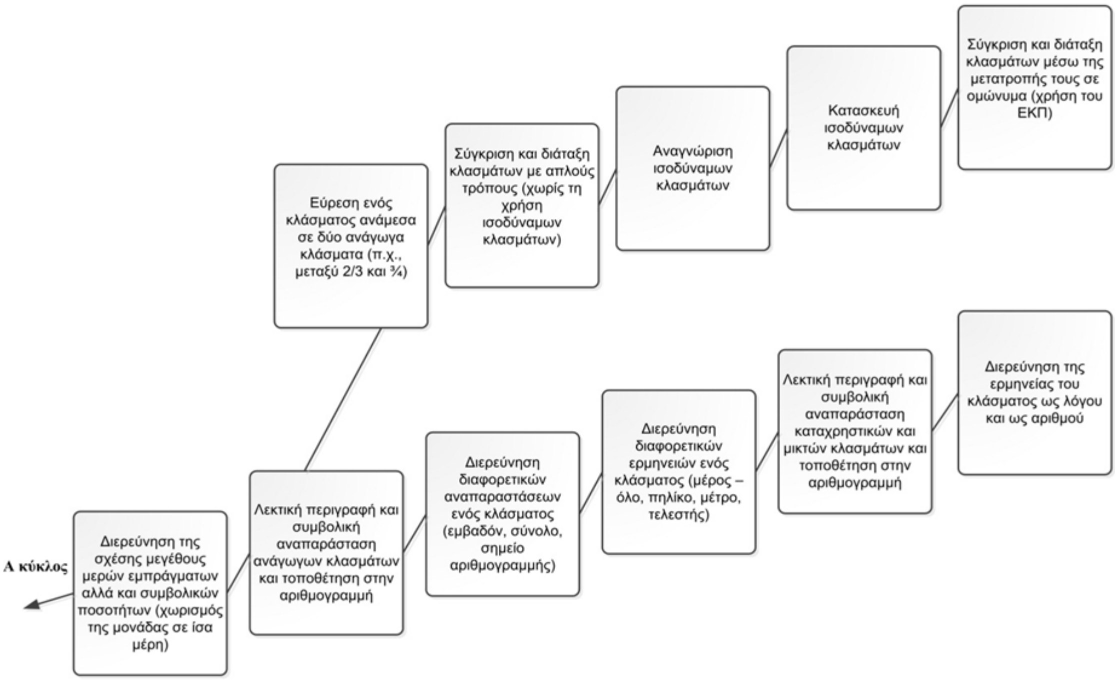
Και η τροχιά αυτή αναπτύσσεται αποκλειστικά στον τρίτο κύκλο, ωστόσο, τα βασικά επιστημολογικά χαρακτηριστικά της αντίστοιχης μαθηματικής γνώσης, αλλά και η αναγκαία γνωστική υποδομή αναμένεται να έχουν θεμελιωθεί, προοδευτικά, κατά τους προηγούμενους δύο κύκλους. Ένα πρόσθετο σημαντικό στοιχείο σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι, πλέον, με τον ορισμό των πραγματικών αριθμών όχι μόνο προσφέρεται στους μαθητές μια ενιαία και ολιστική θέαση της έννοιας του αριθμού, αλλά, επιπλέον, δίνεται η αίσθηση της ολοκλήρωσης μιας κατασκευής που, αναπόφευκτα, αναδεικνύει θεμελιώδη επιστημολογικά ερωτήματα για τα μαθηματικά, όπως αυτά της πληρότητας και της κλειστότητας ενός συνόλου, τα οποία μπορούν να διευκολύνουν σημαντικά την περαιτέρω ανάπτυξη της σχετικής μαθηματικής γνώσης και σκέψης.

Σε ότι αφορά την ανάπτυξη της συγκεκριμένης τροχιάς στο Γυμνάσιο, οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναγνωρίσουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών και να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες με δοκιμές και με τη χρήση αριθμομηχανής. Επιπλέον, αναγνωρίζουν τους άρρητους αριθμούς ως αριθμούς που δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα ακεραίων και ως αριθμούς με άπειρο, μη περιοδικό δεκαδικό μέρος (δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων αριθμών). Ακόμη, παριστάνουν γεωμετρικά και τοποθετούν στην ευθεία αριθμούς της μορφής $\sqrt{\alpha}$. Ακολούθως, ορίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών και διερευνούν τη σχέση του με τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών, συγκρίνουν και διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας την ευθεία των αριθμών και επεκτείνουν τις πράξεις των ρητών στους πραγματικούς. Τέλος, αναγνωρίζουν τη μη επέκταση της "ιδιότητας του επόμενου" στους πραγματικούς αριθμούς και διερευνούν την ιδιότητα της πυκνότητας σε αυτούς.

Τα σχεδιαγράμματα που ακολουθούν αποτελούν μια απόπειρα σχηματικής αποτύπωσης της ανάπτυξης μιας υπο-τροχιάς για την «έννοια του κλάσματος και το σύνολο των κλασματικών αριθμών» στην υποχρεωτική εκπαίδευση (Α΄ και Β΄ κύκλος).



Α΄ κύκλος



Β΄ κύκλος

Σχεδιάγραμμα 1. Σχηματική αναπαράσταση της ανάπτυξης της υπο-τροχιάς «η έννοια του κλάσματος και το σύνολο των κλασματικών αριθμών» στους Α΄ και Β΄ κύκλους (η τροχιά εμφανίζεται διαιρημένη σε δυο μέρη για πρακτικούς λόγους)

Άλγεβρα

Η θεματική «άλγεβρα» περιλαμβάνει τρεις τροχιές: ισότητες & ανισότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και μοτίβα/ κανονικότητες & συναρτήσεις, οι οποίες παρουσιάζονται, στη συνέχεια, με αυτήν τη σειρά. Και εδώ οι διαφορετικές τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και συχνά ενοποιούνται, χωρίς αυτό να είναι πάντοτε εύκολο να ανιχνευτεί και να περιγραφεί με σαφήνεια και ακρίβεια.

Παρακάτω, για κάθε τροχιά της θεματικής «άλγεβρα» περιγράφονται οι ενδεχόμενες υπο-τροχιές και οι σημαντικοί σταθμοί, τα ορόσημά τους. Επιπλέον, περιγράφεται αδρομερώς η εξέλιξη της τροχιάς σε καθέναν από τους τρεις ηλικιακούς κύκλους. Στο τέλος της ενότητας παρατίθεται ως παράδειγμα η σχηματική ανάπτυξη μιας τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης.

1. Τροχιά «Ισότητα & ανισότητα»

Υπο-τροχιές	**Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης**
Ισότητα	• Η έννοια της ισότητας και οι διαφορετικές χρήσεις του ίσον (=). • Εξισώσεις πρώτου βαθμού (επίλυση, κατασκευή, μοντελοποίηση). • Επίλυση απλών πολυωνυμικών εξισώσεων με παραγοντοποίηση (κυρίως δευτεροβάθμιας εξίσωσης). • Γραμμικά συστήματα 2×2 (επίλυση και μοντελοποίηση).
Ανισότητα	• Η έννοια της ανισότητας και οι διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου της. • Ανισώσεις πρώτου βαθμού (επίλυση, κατασκευή, μοντελοποίηση).

Οι σημαντικοί σταθμοί ανάπτυξης της συγκεκριμένης τροχιάς κατά κύκλο έχουν ως εξής:

Α΄ κύκλος: Οι μαθητές διερευνούν τις έννοιες της ισότητας και της ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια και χρησιμοποιούν τα αντίστοιχα σύμβολα για να δηλώσουν την κατάλληλη σχέση μεταξύ αριθμών ή απλών αριθμητικών παραστάσεων (συμπεριλαμβάνονται παραστάσεις με σύμβολα που δηλώνουν αγνώστους ή μεταβλητές, π.χ., △+□=8 ή 3+□=9).

Β΄ κύκλος: Η εστίαση βρίσκεται στη μελέτη των διαφορετικών χρήσεων του συμβόλου της ισότητας και της ανισότητας. Έτσι, αρχικά, οι μαθητές διατάσσουν αριθμούς από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο και αντιστρόφως (φυσικούς, δεκαδικούς, κλάσματα) και συνδέουν τις ανισοτικές τους σχέσεις με τη θέση τους στην αριθμογραμμή. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν το σύμβολο της ισότητας ή της ανισότητας, για να δηλώσουν τη σχέση μεταξύ αριθμητικών παραστάσεων προοδευτικά μεγαλύτερης πολυπλοκότητας [π.χ., 6-1 … 2+5, 5+(7-4) … (5+7)-4] ή να συμπληρώσουν ισότητες και ανισότητες με τον κατάλληλο αριθμό [π.χ., 6+□<10-1 ή 2(3+4)–5 =△+8]. Ακόμη, μοντελοποιούν προβλήματα με εξισώσεις της μορφής α+x=β, α·x=β, και τις επιλύουν με δοκιμές και με τη χρήση αντίστροφων πράξεων.

Γ΄ κύκλος: Κεντρικό αντικείμενο μάθησης είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις (έννοια, επίλυση, μοντελοποίηση). Οι μαθητές εισάγονται στις έννοιες της εξίσωσης και της ανίσωσης και εξετάζουν ποιοι αριθμοί τις επαληθεύουν. Στη συνέχεια, εργάζονται με εξισώσεις της μορφής α+x=β, αx=β και αργότερα της μορφής αβ=γx και α/β=γ/x (αντιστοίχως και στις ανισώσεις), τις οποίες χρησιμοποιούν για να μοντελοποιήσουν σχετικές καταστάσεις και τις επιλύουν με εφαρμογή ιδιοτήτων της ισότητας (ή της ανισότητας, αντιστοίχως).

Ακολούθως, εμπλέκονται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης με γραμμικές εξισώσεις, πρώτα της μορφής αx+β=γ και έπειτα της μορφής αx+β=γx+δ, τις οποίες επιλύουν αριθμητικά, αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με τη συνάρτηση y=αx+β). Αυτή η φάση εργασίας επαναλαμβάνεται με τις ανισώσεις, αρχικά της μορφής αx+β<γ και, στη συνέχεια, της μορφής αx+β<γx+δ που, επίσης, επιλύονται αλγεβρικά και γραφικά. Αργότερα, οι μαθητές εισάγονται στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων (κυρίως δεύτερου βαθμού), οι οποίες, με παραγοντοποίηση, ανάγονται σε πρωτοβάθμιες. Τέλος, μοντελοποιούν προβλήματα με δύο γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+βy=γ ή δύο συναρτήσεις της μορφής y=αx+β και αναζητούν τις κοινές λύσεις τους γραφικά και αλγεβρικά (γραμμικά συστήματα 2x2).

2. Τροχιά «Αλγεβρική παράσταση»

Τροχιά	**Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης**
Αλγεβρική παράσταση	• Ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (μετασχηματισμός αριθμών, καθώς και απλών αριθμητικών προτάσεων με αξιοποίηση ιδιοτήτων των πράξεων, χρήση συμβόλων σε απλές αριθμητικές προτάσεις, συμβολική έκφραση ενός απλού προβλήματος). • Διερεύνηση του αλγεβρικού χαρακτήρα της αριθμητικής (μελέτη των ιδιοτήτων των πράξεων, γενίκευση με λεκτική διατύπωση, αξιοποίησή τους για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων). • Διερεύνηση των διαφορετικών χρήσεων του γράμματος (για την έκφραση μεγεθών, τη γενική διατύπωση ιδιοτήτων πράξεων και δυνάμεων με εκθέτες φυσικούς αριθμούς, ως αγνώστου σε απλές εξισώσεις, ως μεταβλητής στο γενικό όρο μοτίβων και ως παραμέτρου στις συναρτήσεις). • Διαχείριση αλγεβρικών παραστάσεων (ερμηνεία, δημιουργία, υπολογισμός της αριθμητικής τιμής και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων). • Εισαγωγή στον αλγεβρικό λογισμό (δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες, τετραγωνική ρίζα και ιδιότητές τους αντιστοίχως, πράξεις πολυωνύμων, απλές ταυτότητες, παραγοντοποίηση πολυωνύμων).

Η τροχιά αναπτύσσεται σύμφωνα με τον ακόλουθο προσανατολισμό σε καθέναν από τους τρεις κύκλους:

Α΄ κύκλος: Στη διάρκεια αυτού του κύκλου οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες μετασχηματισμού αριθμών για λόγους διευκόλυνσης υπολογισμών (π.χ., 7+9=7+7+2=14+2=16) και διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων και το ρόλο του «=» σε απλές αριθμητικές παραστάσεις, ‘κλειστές’ (π.χ., □+3=9-2) ή ‘ανοικτές’ (△+□=8). Ακόμη, ενθαρρύνονται να εκφράσουν ένα απλό πρόβλημα με μια αριθμητική παράσταση ή σχέση και το αντίστροφο.

Β΄ κύκλος: Οι δραστηριότητες του πρώτου κύκλου επαναλαμβάνονται, αλλά οι αριθμητικές παραστάσεις που αξιοποιούνται είναι, πλέον, πιο σύνθετες. Επιπλέον, οι μαθητές διερευνούν τη γενίκευση των ιδιοτήτων των πράξεων και τη διατυπώνουν λεκτικά. Ακόμη, καλούνται να υπολογίσουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων, αρχικά απλών, στη συνέχεια, με παρενθέσεις και αργότερα με δυνάμεις, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων. Επίσης, συζητούν για τη δομή μιας αριθμητικής παράστασης, χρησιμοποιώντας κατάλληλους όρους (παράγοντες, όροι ;, κ.ά.). Τέλος, χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε σχέσεις (από την καθημερινή ζωή και τις επιστήμες), αγνώστους σε απλές εξισώσεις και μεταβλητές στο γενικό όρο μοτίβων και στις συναρτήσεις.

Γ΄ κύκλος: Συνεχίζοντας στην κατεύθυνση των δραστηριοτήτων του προηγούμενου κύκλου, οι μαθητές καλούνται να μεταβαίνουν από τη λεκτική στη συμβολική μορφή μιας απλής αλγεβρικής παράστασης και αντιστρόφως, να μοντελοποιούν ένα πρόβλημα με μια αλγεβρική παράσταση μίας ή περισσότερων μεταβλητών, να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας παράστασης, να απλοποιούν μια αλγεβρική παράσταση, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων και να αναγνωρίζουν τα δομικά της στοιχεία (το 2x+3 είναι άθροισμα). Επιπλέον, οι δραστηριότητες που αφορούν στη χρήση γραμμάτων εμπλουτίζονται, ενθαρρύνοντας, προοδευτικά τους μαθητές να διακρίνουν τους διαφορετικούς ρόλους τους: μεταβλητή (ανεξάρτητη/ εξαρτημένη) και παράμετρος στις συναρτήσεις, άγνωστος στις εξισώσεις, μέγεθος στους τύπους, γενικός και ανεξάρτητος αριθμός στις ταυτότητες.

Στη συνέχεια, οι μαθητές εισάγονται στις δυνάμεις με αρνητικούς εκθέτες και στις τετραγωνικές ρίζες και μελετούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες, καθώς και απλές ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών ($\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$).

Το υπόλοιπο της ανάπτυξης της συγκεκριμένης τροχιάς στον τρίτο κύκλο αφορά στα πολυώνυμα και περιλαμβάνει ορόσημα ανάλογα με αυτά που συνδέονταν με τις αλγεβρικές παραστάσεις στους δύο προηγούμενους κύκλους. Ειδικότερα, οι μαθητές: εκτελούν πράξεις απλών πολυωνύμων (κυρίως μίας μεταβλητής), αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά (όπου είναι δυνατόν) τις ταυτότητες $(\alpha\pm\beta)^2$, $(\alpha\pm\beta)^3$ α^2-β^2 α^3-β^3, α^3+β^3, παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα, μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα σε διάφορα πλαίσια, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα και ταυτότητες, αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής ενός πολυωνύμου και χρησιμοποιούν κατάλληλη ορολογία και, τέλος, βρίσκουν το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων, κάνουν πράξεις απλών ρητών παραστάσεων και τις απλοποιούν.

3. Τροχιά «μοτίβο/ κανονικότητα και συνάρτηση»

Η συγκεκριμένη τροχιά περιλαμβάνει δύο υπο-τροχιές, μία για το μοτίβο/ κανονικότητα και μία για τις συναρτήσεις.

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Μοτίβο/ κανονικότητα	• Αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή της κανονικότητας και της διαδικασίας παραγωγής της, κατασκευή κανονικοτήτων διαφόρων τύπων. • Αναπαράσταση κανονικοτήτων με διαφορετικούς τρόπους -

	μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη. • Εύρεση και συμβολική διατύπωση του γενικού όρου της κανονικότητας. • Μοντελοποίηση και μελέτη καταστάσεων μέσω κανονικοτήτων.
Συνάρτηση	• Διερεύνηση σχέσεων μεγεθών από την καθημερινή ζωή - συμμεταβαλόμενα μεγέθη. • Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης (μεταβλητή, μονοσήμαντη απεικόνιση, αναπαραστάσεις συναρτήσεων, ερμηνεία αναπαραστάσεων). • Μοντελοποίηση απλών καταστάσεων και απαντήσεις σε ερωτήματα που τις αφορούν μέσω συναρτήσεων. • Διερεύνηση συγκεκριμένων συναρτήσεων (γραμμικών, της μορφής ψ=α/x, τετραγωνικών και ρυθμού μεταβολής).

Η ανάπτυξη των δύο υπο-τροχιών σε καθέναν από τους τρεις κύκλους διακρίνεται από τα κάτωθι χαρακτηριστικά:

Α΄ κύκλος: Βασικός προσανατολισμός της σχετικής εργασίας στην τάξη είναι η μύηση των μαθητών στη διερεύνηση σχέσεων και δομών. Προς αυτήν την κατεύθυνση, αναφορικά με τα μοτίβα, οι σχετικές δραστηριότητες ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να περιγράφουν και να κατασκευάζουν απλές γεωμετρικές, αριθμητικές και άλλες κανονικότητες, πρώτα επαναλαμβανόμενες και κατόπιν αυξανόμενες ή μειούμενες.

Σχετικά με τις συναρτήσεις, οι μαθητές καλούνται να διερευνούν μεταβολές μεγεθών σε σχέση με άλλα μεγέθη στην καθημερινή ζωή και αντιστοιχίες μέσα από παιχνίδια.

Β΄ κύκλος: Στη μελέτη των κανονικοτήτων επαναλαμβάνονται όσα και στον προηγούμενο κύκλο, αλλά σε ανώτερο επίπεδο, καθώς οι αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες είναι πιο σύνθετες, ενώ προστίθενται και αναδρομικές. Επιπλέον, η σχετική εργασία των μαθητών περιλαμβάνει γενίκευση της κανονικότητας, αναπαράστασή της με διαφορετικά μέσα (εικονικά, λεκτικά, αριθμητικά), σύγκριση κανονικοτήτων, λεκτική διατύπωση του κανόνα του μοτίβου, εύρεση του επόμενου, αλλά και ενός απομακρυσμένου όρου και, τέλος, συμβολική διατύπωση του γενικού όρου στις αριθμητικές κανονικότητες, χρησιμοποιώντας μεταβλητές (π.χ., ν+2).

Σε σχέση με τις συναρτήσεις, η έμφαση βρίσκεται στην αισθητοποίηση της σχετικής έννοιας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές συνεχίζουν να διερευνούν καταστάσεις συμμεταβολής: ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, συσχέτιση μεγεθών στη γεωμετρία (Ε=1/2βυ), στη φυσική (υ=s/t), κτλ, γενικά, σχέση ανεξάρτητης-εξαρτημένης μεταβλητής και υπολογισμός ενός μεγέθους με αντικατάσταση αριθμού στις μεταβλητές. Τέλος, διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών.

Γ΄ κύκλος: Η ανάπτυξη της υπο-τροχιάς της κανονικότητας ολοκληρώνεται με τους μαθητές να διερευνούν αριθμητικές κανονικότητες, να διατυπώνουν το γενικό όρο λεκτικά και συμβολικά και να τις αναπαριστούν εικονικά, αριθμητικά με πίνακες ή γεωμετρικά σε σύστημα ημι-αξόνων.

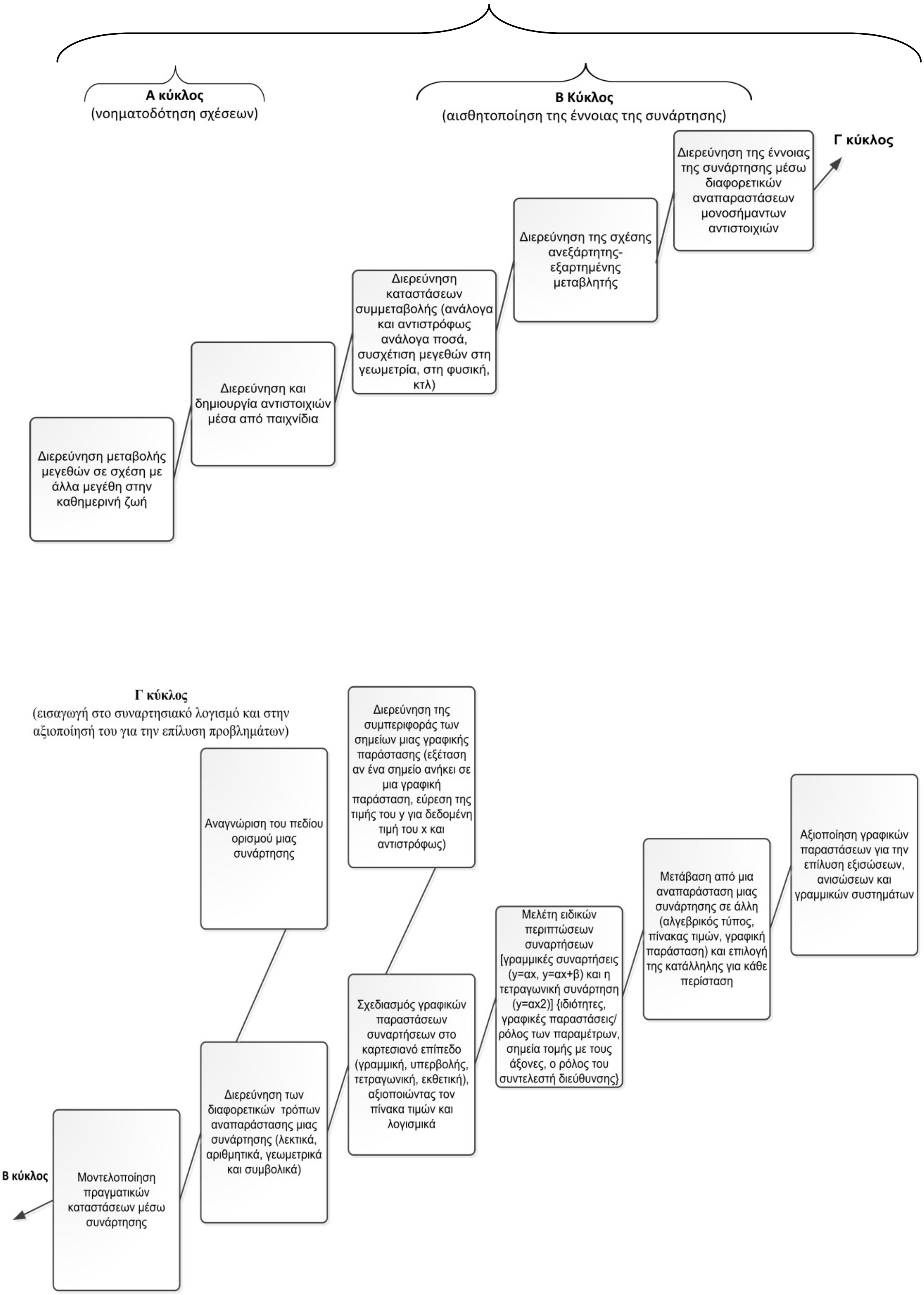
Η υπο-τροχιά των συναρτήσεων επικεντρώνεται, πλέον, στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασής της και της χρήσης τους για την επίλυση προβλημάτων. Ειδικότερα, οι μαθητές, οικοδομώντας πάνω στη σχετική εμπειρία των προηγούμενων κύκλων, μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση, εκφράζουν μια συνάρτηση με διαφορετικούς τρόπους (λεκτικά, αριθμητικά, γεωμετρικά και συμβολικά), βρίσκουν τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της εξαρτημένης και αντιστρόφως και αναγνωρίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης.

Ακολούθως, η σχετική εργασία στην τάξη εστιάζεται στις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων: οι μαθητές σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (γραμμικών, υπερβολών, τετραγωνικών, εκθετικών με αυτήν τη σειρά), οι οποίες μοντελοποιούν μια κατάσταση, χρησιμοποιώντας σημεία (πίνακα τιμών) και λογισμικά. Ακόμη, εξετάζουν αν ένα σημείο ανήκει σε μια γραφική παράσταση και, τη χρησιμοποιούν για να βρουν την τιμή του y για δεδομένη τιμή του x και αντιστρόφως.

Στη συνέχεια, η εστίαση μετακινείται στη μελέτη ειδικών περιπτώσεων συναρτήσεων: οι μαθητές διερευνούν τις γραμμικές συναρτήσεις (y=αx, y=αx+β) και την τετραγωνική συνάρτηση $y=αx^2$, τις ιδιότητές τους και τις γραφικές τους παραστάσεις (εξετάζονται ο ρόλος των παραμέτρων, τα σημεία τομής με τους άξονες, ο ρόλος του συντελεστή διεύθυνσης και η χρήση του στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης).

Η υπο-τροχιά που αφορά στη συνάρτηση ολοκληρώνεται με δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να μετακινούνται από μια αναπαράσταση σε άλλη (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση), να επιλέγουν την κατάλληλη, σε κάθε περίσταση, αναπαράσταση και να χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις για την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και γραμμικών συστημάτων.

Τα σχεδιαγράμματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια συνιστούν μια προσπάθεια σχηματικής αποτύπωσης της ανάπτυξης μιας τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης στην υποχρεωτική εκπαίδευση (Α΄, Β΄ και Γ΄ κύκλοι).



Σχεδιάγραμμα 2. Σχηματική αναπαράσταση μιας ανάπτυξης της τροχιάς «συνάρτηση» στους τρεις κύκλους (εδώ εμφανίζεται σε δύο μέρη για πρακτικούς λόγους).

Χώρος – Γεωμετρία – Μετρήσεις

Η θεματική ενότητα του **Χώρου-Γεωμετρίας** αναπτύσσεται σε τέσσερις τροχιές: *Χώρος, Γεωμετρικά Σχήματα, Μετασχηματισμοί και Οπτικοποιήσεις*.

- Η **πρώτη τροχιά του Χώρου** αφορά σε δύο θέματα: **σ**τις *Θέσεις διευθύνσεις, διαδρομές σε χάρτες* όπως και στη *Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες*

Το θέμα **«***Θέσεις διευθύνσεις και διαδρομές σε χάρτες***»** αναφέρεται στον εντοπισμό, περιγραφή και αναπαράσταση θέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών, αρχικά στο χώρο και μεταγενέστερα σε χάρτες.

Οι μαθητές στον πρώτο κύκλο συστηματοποιούν τις χωρικές εμπειρίες με την αξιοποίηση διαφορετικών συστημάτων αναφοράς, χρήση χωρικών εννοιών και πρώτη επαφή με οικείους χάρτες (βλ. ΓΔ1, ΓΔ2, Νηπιαγωγείο και Α΄ Δημοτικού). Στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν την αναγνώριση, περιγραφή θέσεων, σχέσεων και διαδρομών σε χάρτες και οδηγούνται στην προσέγγιση της κλίμακας και της κατασκευής τους (βλ. όμοια, ΓΔ1, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο οδηγούνται στην άνετη χρήση και κατασκευή χαρτών με εφαρμογή κλίμακας και αξιοποίηση της ομοιότητας για επίλυση προβλημάτων με αποστάσεις και διαδρομές και εισάγονται στα διανύσματα (βλ. ΓΔ1, Β΄ Γυμνασίου).

Το θέμα «*Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες*» αναφέρεται στις επικαλύψεις του επιπέδου με διάφορα σχήματα και ουσιαστικά στην εξοικείωση και μελέτη του τετραγωνισμένου περιβάλλοντος που οδηγεί στις δισδιάστατες συντεταγμένες.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές στον πρώτο κύκλο αρχικά εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα και, στη συνέχεια, επιδιώκουν να εντοπίσουν τρόπους παράστασης και επικοινωνίας των καταστάσεων αυτών με τη χρήση αυθαίρετων συμβόλων όπως χρώματα, γράμματα και αριθμούς (βλ. ΓΔ4, Α΄ Δημοτικού και ΓΔ2, ΓΔ3, Β΄ Δημοτικού). Στη συνέχεια, στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν τη χρήση αριθμητικών ζευγών και, στη συνέχεια, διατεταγμένων ζευγών για την παράσταση θέσεων στο πρώτο τεταρτημόριο (βλ. δραστηριότητα ΓΔ1, Δ' Δημοτικού) και τέλος στον τρίτο κύκλο γενικεύουν τη χρήση συντεταγμένων και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια για την απόδοση χωρικών σχέσεων και σχημάτων (βλ. ΓΔ4, Β΄ Γυμνασίου και ΓΔ1, Γ΄ Γυμνασίου).

- Η **δεύτερη τροχιά των Γεωμετρικών Σχημάτων** αφορά τέσσερα θέματα: *Ταξινόμηση και Ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες, Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός, Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων, Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων*.

Στο θέμα «*Ταξινόμηση και ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες*» οι μαθητές ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των σχημάτων (επίπεδων και στερεών) με βάση γεωμετρικά και μη χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις (βλ. δραστηριότητες ΓΔ3, Νηπιαγωγείο, ΓΔ5, Α΄, ΓΔ4, ΓΔ5, Β΄ Δημοτικού). Στη συνέχεια, στο δεύτερο ηλικιακό κύκλο, διευρύνουν την αναγνώριση και στα στοιχεία των σχημάτων (σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα), καθώς και στις ιδιότητες (παράλληλες, κάθετες, ίσες, άνισες) και ταξινομούν τα σχήματα (τρίγωνα, τετράπλευρα, πολύγωνα και πολύεδρα) με βάση τις ιδιότητες όπως αριθμός πλευρών, σύγκριση γωνιών, μήκος πλευρών κ.λπ. (βλ. ΓΔ2 και ΓΔ3 Δ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο, οι μαθητές διατυπώνουν απλούς ορισμούς και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, εφαρμόζοντάς τες στην επίλυση χωρικών προβλημάτων (βλ. δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ4, Α΄ Γυμνασίου και ΓΔ2, ΓΔ3 Β΄ Γυμνασίου).

Αντίστοιχα, στο θέμα «*Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός*», οι μαθητές ξεκινούν στον πρώτο κύκλο με απλές κατασκευές με χρήση χειραπτικών υλικών και απλές παραστάσεις (βλ. ΓΔ11, Β΄ Δημοτικού). Στο δεύτερο ηλικιακό κύκλο περνούν σε απλούς σχεδιασμούς σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον, χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και σχεδιάζουν γεωμετρικά στοιχεία (ευθείες, ημιευθείες, κύκλους, κ.λπ.), καθώς και γεωμετρικά σχήματα (βλ. δραστηριότητες ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, Γ' Δημοτικού, ΓΔ4, Δ΄ Δημοτικού, ΓΔ2, Ε΄ Δημοτικού και ΓΔ3, ΓΔ4 ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο χρησιμοποιούν πιο τυποποιημένα μέσα (κανόνα και διαβήτη ή αντίστοιχα ψηφιακά περιβάλλοντα) κατανοώντας τη διαφορά μιας κατασκευής με βαθμολογημένα όργανα από τη γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη και λύνουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών (βλ. ΓΔ3, ΓΔ7, Α΄ Γυμνασίου) .

Στο θέμα «*Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων*», οι μαθητές του πρώτου κύκλου ξεκινούν να αναγνωρίζουν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως έδρες στερεών και κάνουν απλές κατασκευές αναπτυγμάτων, στη συνέχεια, στο δεύτερο κύκλο επεκτείνουν την αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων ως έδρες στερεών, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετραγώνου-κύβου, κύκλου- σφαίρας, κ.ά.) και γενικεύουν τη σύνδεση με όψεις και τομές, ενώ παράλληλα δημιουργούν και σχεδιάζουν αναπτύγματα στερεών (αρχικά κύβου και, στη συνέχεια, και άλλων στερεών, βλ. δραστηριότητα ΓΔ3, Δ΄ Δημοτικού, ΓΔ3, ΓΔ6 Ε΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο, συνδέουν τα στερεά με τα αναπτύγματά τους, όπως και τα επίπεδα και στερεά σχήματα με τις τομές.

Τέλος, στο θέμα «*Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων*» οι μαθητές του πρώτου κύκλου συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη (απλά παζλ αποτελούμενα από δύο ή τρία κομμάτια τάνγκραμ ή πεντόμινο) και σε πραγματικό ή ψηφιακό περιβάλλον προσεγγίζοντας ιδιότητες και σχέσεις (βλ. δραστηριότητες ΓΔ4, Νηπιαγωγείο, ΓΔ6, Α΄ και Β΄ Δημοτικού). Στο δεύτερο και τρίτο κύκλο αναλύουν και συνθέτουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα σε πιο σύνθετες καταστάσεις αναγνωρίζοντας ιδιότητες και σχέσεις και συνδέοντας τες με τη μέτρηση επιφάνειας (βλ. ΜΔ1, ΣΤ΄ Δημοτικού).

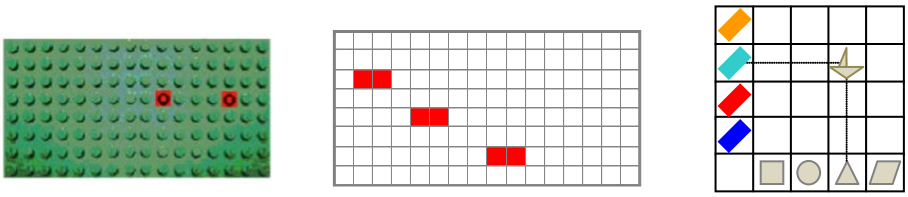
- Η **τρίτη τροχιά των Μετασχηματισμών** αφορά μετατοπίσεις, στροφές και συμμετρίες.

Στον πρώτο κύκλο οι μαθητές παρατηρούν μετατοπίσεις και στροφές (90, 180, 360 και 45 μοιρών) προβλέποντας το αποτέλεσμα, αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα εντοπίζοντας τους άξονες συμμετρίας και κάνουν κατασκευές συμμετρικών καταστάσεων και σχημάτων σε πραγματικά και ψηφιακά περιβάλλοντα, προσεγγίζοντας τις ιδιότητες της συμμετρίας (βλ. ΓΔ5, Νηπιαγωγείο, ΓΔ7, Α΄ Δημοτικού, ΓΔ7 και ΓΔ8, Β΄ Δημοτικού). Στο δεύτερο κύκλο, χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς για σύγκριση σχημάτων και πραγματοποιούν κατασκευές με τη χρήση μετατοπίσεων και στροφών, κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας με οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες και περιγράφουν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας (βλ. ΓΔ4, Γ΄ Δημοτικού, ΓΔ4, Ε΄ Δημοτικού, ΓΔ5 και ΓΔ7, ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο οι μαθητές δημιουργούν και συνδυάζουν μετατοπίσεις και στροφές για γεωμετρικές και άλλες κατασκευές, χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της συμμετρίας για να εντοπίσουν τις ιδιότητες των σχημάτων και πραγματοποιούν κατασκευές συμμετρικών με διάφορους άξονες (βλ. ΓΔ5 και ΓΔ6, Β΄ Γυμνασίου και ΓΔ3, Γ΄). Στον κύκλο αυτό οι μαθητές γνωρίζουν την κεντρική συμμετρία και την ομοιότητα (βλ. ΓΔ2 και ΓΔ5, Γ΄ Γυμνασίου).

Παρακάτω, δίνονται δύο παραδείγματα για την τροχιά του χώρου και ιδιαίτερα για την ανάπτυξη της έννοιας των συντεταγμένων και για την τροχιά των μετασχηματισμών – συμμετρίας που δείχνουν πώς εξελίσσονται οι υποτροχιές στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

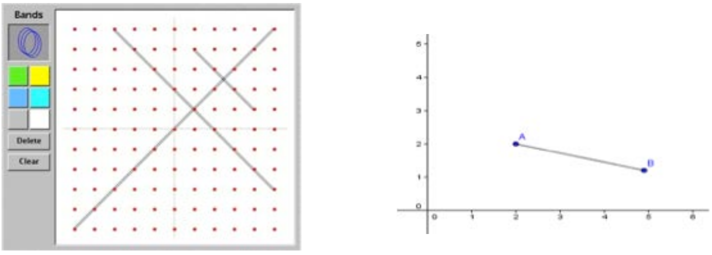
Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Χώρου»

Ενδεικτικό παράδειγμα διαδοχής των δράσεων σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της έννοιας των συντεταγμένων αποτελούν οι δράσεις σε χειραπτικό και αναπαραστατικό τετραγωνισμένο υλικό (τουβλάκια ή τετραγωνισμένο χαρτί) στις μικρές τάξεις του Δημοτικού για τον εντοπισμό και την περιγραφή χωρικών καταστάσεων και, ουσιαστικά, για την εξοικείωση με τα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος αυτού, όπως και αναζήτηση τρόπων κωδικοποίησης (Α΄ και Β΄ Δημοτικού) (Εικόνα 1).



Εικόνα 1

Στη συνέχεια, οι μαθητές θα ασχοληθούν με πιο τυπικές μορφές συντεταγμένων, ξεκινώντας από τους τετραγωνισμένους καμβάδες με εκφράσεις του τύπου «το στοιχείο βρίσκεται στην $3^{η}$ γραμμή και στην $4^{η}$ στήλη (βλ. σχετική δραστηριότητα, ΓΔ1, Γ΄ Δημοτικού) για να οδηγηθούν σε ζευγάρια αριθμών όπως «3 και 4» και, τελικά, στα διατεταγμένα ζεύγη, στο γεωπίνακα ή σε συστήματα συντεταγμένων, γραφικά ή ψηφιακά (Εικόνα 2).



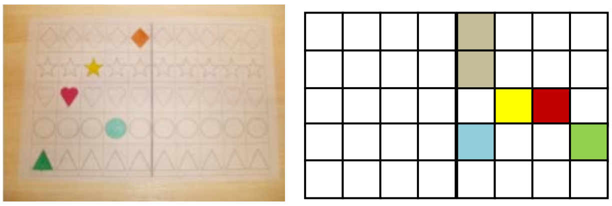
Εικόνα 2

Μεταγενέστερα, οι συντεταγμένες θα επεκταθούν και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια και θα χρησιμοποιηθούν στην παράσταση συναρτήσεων.

Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Μετασχηματισμοί»

Η συμμετρία αποτελεί ένα κατάλληλο παράδειγμα εξέλιξης μιας τροχιάς. Αν και αναγνωρίζεται οπτικά από τις μικρότερες ηλικίες, η κατανόηση των ιδιοτήτων και οι κατασκευές συμμετρικών με διάφορους άξονες αποτελεί το ζητούμενο της ανάπτυξής της.

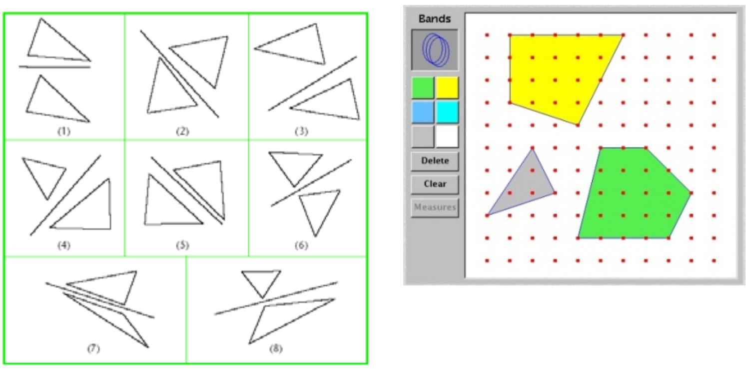
Στις πρώτες τάξεις οι μαθητές ασκούνται να αναγνωρίζουν συμμετρικά αντικείμενα ή σχήματα, να ελέγχουν με δίπλωση και να εντοπίζουν τους άξονες. Παράλληλα, ενθαρρύνονται σε απλές κατασκευές (σε απλό, τετραγωνισμένο ή και ψηφιακό περιβάλλον) για να προσεγγίσουν ιδιότητες (Εικόνα 3).



Εικόνα 3

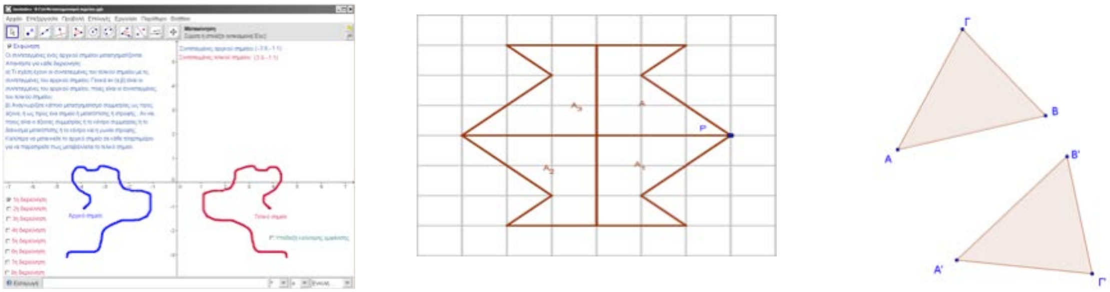
Στη συνέχεια της ανάπτυξης οι μαθητές αντιμετωπίζουν καταστάσεις, όπου άλλες είναι συμμετρικές κι άλλες όχι, και καλούνται να εξηγήσουν (βλ. ΓΔ8, Γ΄ Δημοτικού) γιατί δεν είναι συμμετρικές εντοπίζοντας ιδιότητες. Τέτοιες δράσεις οδηγούν στη συστηματοποίηση των ιδιοτήτων των συμμετρικών σχημάτων.

Επίσης, οι μαθητές κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχηματισμούς σε τετραγωνισμένα και μη περιβάλλοντα με χαρτί-μολύβι και ψηφιακά (Εικόνα 4).



Εικόνα 4

Στον τρίτο κύκλο οι μαθητές, στηριζόμενοι στην προηγούμενη εμπειρία, θα συστηματοποιήσουν τη συμμετρία και τις ιδιότητές της και θα προχωρήσουν σε γεωμετρική κατασκευή της συμμετρίας με κανόνα και διαβήτη, σε άξονες με διαφορετικούς προσανατολισμούς (Εικόνα 5).



Εικόνα 5

- Η **τέταρτη τροχιά των οπτικοποιήσεων** αφορά *αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων, καθώς* και *δημιουργία πραγματικών και νοερών αναπαραστάσεων για αντικείμενα και καταστάσεις.*

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές ασκούνται στην αναγνώριση κατασκευών από διαφορετικές οπτικές γωνίες, στη σύνδεση 2Δ και 3Δ καταστάσεων, καθώς και στη δημιουργία νοερών εικόνων και περιγραφών αλλά και πραγματικών παραστάσεων τρισδιάστατων καταστάσεων (βλ. ΓΔ6, ΓΔ7, Νηπιαγωγείο, ΓΔ9, Β΄ Δημοτικού). Στο δεύτερο κύκλο οι μαθητές κάνουν κατασκευές από εικόνες, σχέδια και άλλες αναπαραστάσεις, αλλά σχεδιάζουν, επίσης, σε ισομετρικό χαρτί ή σε ψηφιακό περιβάλλον δοσμένες τρισδιάστατες κατασκευές (βλ. ΓΔ5, Γ΄ Δημοτικού και ΓΔ5, Δ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο αναγνωρίζουν όψεις και τομές 3Δ σχημάτων, σχεδιάζουν 3Δ σχήματα όπως και όψεις και κατόψεις, καθώς και αναπτύγματα στερεών σχημάτων.

Η θεματική ενότητα των **Μετρήσεων** αναπτύσσεται σε τέσσερις τροχιές: *Μέτρηση γωνίας, μήκους, επιφάνειας και όγκου.*

- Η **πρώτη τροχιά της Μέτρησης γωνίας** αφορά τη σύγκριση γωνιών μεταξύ τους και με την ορθή, τη μέτρηση με τυπικές μονάδες και τη χρήση εργαλείων, την εκτίμηση γωνιών όπως και εφαρμογές με τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές αναγνωρίζουν τις ίσες γωνίες και συγκρίνουν με την ορθή και, στη συνέχεια, στο δεύτερο κύκλο συγκρίνουν με τη χρήση διαφόρων (υλικών και μη) μέσων και τις μετρούν με τυπικές μονάδες και μοιρογνωμόνιο (βλ, ΜΔ1, Δ΄ Δημοτικού, ΓΔ6, ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο κάνουν πράξεις με τις γωνίες, συγκρίνουν χρησιμοποιώντας ιδιότητες και σχέσεις, κάνουν κατασκευές γωνιών με όργανα και προσεγγίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και την κλίση (βλ. ΜΔ1, Α΄ Γυμνασίου και ΜΔ5, Β΄ Γυμνασίου). Σε όλους τους κύκλους ενθαρρύνονται οι συγκρίσεις γωνιών κατ’ εκτίμηση, ανεξάρτητα από το μήκος των πλευρών τους ή τον προσανατολισμό.

- Η **δεύτερη τροχιά της Μέτρησης μήκους** αφορά τη σύγκριση μηκών, την ανάλυση και σύνθεσή τους, την πραγματοποίηση επικαλύψεων με τυπικές και μη τυπικές μονάδες και, στη συνέχεια, τη μέτρηση όπως και την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν μετρήσεις μηκών και εκτιμήσεις.

Η εισαγωγή στη μέτρηση μηκών ξεκινάει από τον πρώτο κύκλο όπου οι μαθητές αρχικά πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις, διατάξεις, καθώς και αναλύσεις και συνθέσεις μηκών. Στη συνέχεια, πραγματοποιούν επικαλύψεις με επαναλήψεις με μη τυπικές και τυπικές μονάδες, διαπιστώνουν την ανάγκη χρήσης τυπικών μονάδων μέτρησης και συνδέουν το αριθμητικό αποτέλεσμα της επικάλυψης με επανάληψη με το μήκος. Από τον κύκλο αυτό πραγματοποιούν μετρήσεις με το χάρακα, επιλύουν απλά μετρικά προβλήματα και συγκρίνουν μήκη κατ’ εκτίμηση (βλ. ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ3, ΜΔ4, Νηπιαγωγείο, και ΜΔ1, Α΄ Δημοτικού).

Στο δεύτερο κύκλο οι μαθητές συστηματοποιούν τις μετρήσεις με τις τυπικές μονάδες, τις οποίες προσεγγίζουν, συγκρίνουν και επιλύουν σχετικά προβλήματα. Υπολογίζουν περιμέτρους σχημάτων και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών και περιμέτρων, όπως και διαμέτρου και κύκλου (βλ ΜΔ2, Δ΄ Δημοτικού και ΜΔ1, ΜΔ2, Ε΄ Δημοτικού). Χρησιμοποιούν όργανα για σύγκριση και μεταφορά ευθύγραμμων τμημάτων και κάνουν συγκρίσεις κατ’ εκτίμηση.

Τέλος, στον τρίτο κύκλο γενικεύουν τις προηγούμενες γνώσεις σε ιδιότητες και σχέσεις ευθύγραμμων τμημάτων και καμπύλων γραμμών, υπολογίζουν μήκη με χρήση λόγων, αναλογιών και θεωρημάτων, διερευνούν σχέσεις μηκών τόξου και επιλύουν προβλήματα μέτρησης με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης, αναπτύσσοντας μεθόδους και στρατηγικές προσεγγιστικού υπολογισμού της περιμέτρου ακανόνιστων σχημάτων (βλ ΜΔ2, ΜΔ3, Β΄ Γυμνασίου).

- Η **τρίτη τροχιά της Μέτρησης επιφάνειας** αφορά τη σύγκριση επιφανειών, την ανάλυση και σύνθεσή τους, την πραγματοποίηση επικαλύψεων με τυπικές και μη τυπικές μονάδες και, στη συνέχεια, τη μέτρησή τους όπως και την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν μετρήσεις επιφανειών και εκτιμήσεις.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών, με αναλύσεις και συνθέσεις και μετατοπίσεις, επικαλύπτουν επιφάνειες χρησιμοποιώντας μη τυπικές ή τυπικές μονάδες, δομούν τις επιφάνειες με μη τυπικές και τυπικές μονάδες σε γραμμές και στήλες και καταμετρούν συστηματικά το πλήθος των μονάδων, συνδέοντας το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης με την επιφάνεια και τη μονάδα μέτρησης. Επιλύουν απλά προβλήματα μέτρησης επιφάνειας με τη χρήση χειραπτικού υλικού και αναπαραστάσεων και ασκούνται στην εκτίμηση επιφανειών (βλ. ΜΔ5, ΜΔ6, ΜΔ7, Νηπιαγωγείο, ΜΔ 2, ΜΔ3, Α΄ Δημοτικού και ΜΔ12, Β΄ Δημοτικού).

Στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν τις παραπάνω γνώσεις πραγματοποιώντας συγκρίσεις απλών επιφανειών με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων, δομώντας ορθογώνιες επιφάνειες με γραμμές και στήλες και χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ γραμμών και στηλών για να υπολογίσουν το εμβαδόν δομημένων επιφανειών (βλ. ΜΔ1, Γ΄ Δημοτικού, ΜΔ2, ΜΔ3, Δ΄ Δημοτικού, ΜΔ2, ΜΔ3, Ε΄ Δημοτικού και ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ4, ΜΔ5, ΣΤ΄ Δημοτικού). Υπολογίζουν το εμβαδόν των βασικών σχημάτων και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών, περιμέτρου και εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος (ΜΔ3, ΜΔ6, ΣΤ΄ Δημοτικού). Προσεγγίζουν τις .υποδιαιρέσεις των μονάδων και κάνουν μετατροπές. Επιλύουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών με τη χρήση οργάνων και τύπων και πραγματοποιούν συγκρίσεις επιφανειών κατ' εκτίμηση.

Τέλος, στον τρίτο κύκλο πραγματοποιούν συγκρίσεις καμπυλόγραμμων ή μικτόγραμμων ή ακανόνιστων επιφανειών με αναλύσεις / συνθέσεις και με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων, υπολογίζουν το εμβαδόν κύκλου κι άλλων μικτόγραμμων σχημάτων χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών και επιλύουν σχετικά προβλήματα με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης και υπολογισμών κατ' εκτίμηση (βλ. ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ4, Β΄ Γυμνασίου). Παράλληλα, υπολογίζουν το εμβαδόν επιφανειών στερεών σχημάτων.

- Η **τέταρτη τροχιά της Μέτρησης Όγκου** αφορά στη σύγκριση όγκων, την ανάλυση κα σύνθεση τους, την πραγματοποίηση «γεμισμάτων» με τυπικές και μη τυπικές μονάδες και, στη συνέχεια, τη μέτρησή τους όπως και την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν μετρήσεις όγκων και εκτιμήσεις.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές συγκρίνουν τη χωρητικότητα δύο δοχείων, άμεσα ή με τη χρήση ενδιάμεσου, συγκρίνουν όγκους κατασκευών που αποτελούνται από μικρό αριθμό δομικών υλικών (κύβοι) και εκτιμούν τον όγκο απλών κατασκευών και το πλήθος των κύβων που γεμίζουν ένα κουτί (βλ. ΜΔ8, Νηπιαγωγείο, ΜΔ4 Α΄ Δημοτικού).

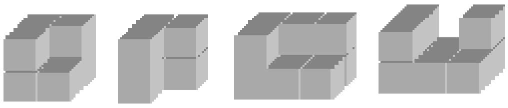
Στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν τον υπολογισμό του πλήθους των κύβων ορθογώνιων κατασκευών συνδυάζοντάς τον με τις γραμμικές διαστάσεις, και εντοπίζοντας την πολλαπλασιαστική σχέση, πραγματοποιώντας μετρήσεις με πραγματικό και αναπαραστατικό υλικό. Υπολογίζουν τον όγκο στερεών με χρήση τυπικών μονάδων και υποδιαιρέσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα και υπολογισμούς κατ' εκτίμηση (βλ. ΜΔ2, Γ΄ Δημοτικού, ΜΔ5, ΣΤ΄ Δημοτικού).

Τέλος, στον τρίτο κύκλο οι μαθητές υπολογίζουν τους όγκους των βασικών στερεών με τη χρήση των προηγούμενων γνώσεων, όπως και σύνθετων σχημάτων με ανάλυση και σύνθεση. Διερευνούν τη σχέση γραμμικών διαστάσεων, εμβαδού επιφανειών και όγκου κι επιλύουν σχετικά προβλήματα (βλ. ΜΔ1, Γ΄ Γυμνασίου).

Παρακάτω, δίνεται ένα παράδειγμα για την τροχιά της μέτρησης του όγκου που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

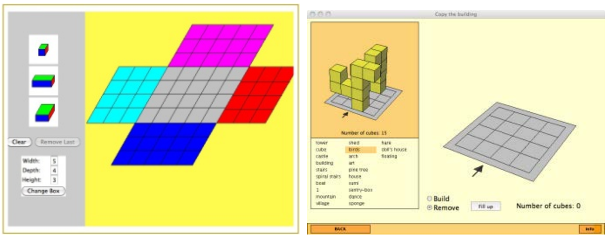
Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Μέτρηση του όγκου»

Οι μαθητές ξεκινούν προσεγγίζοντας το μέγεθος μέσα από συγκρίσεις χωρητικότητας και συνθέσεων με κύβους, εκτιμώντας «*ποιο κουτί είναι πιο μεγάλο;*» και γεμίζοντας με κύβους για να ελέγξουν την εκτίμησή τους. Η δόμηση του χώρου σε τρεις διαστάσεις και η μέτρηση των κύβων που την αποτελούν εμφανίζει δυσκολίες ακόμα και για τα μεγαλύτερα παιδιά, αλλά τα παιδιά των μικρών τάξεων μπορούν να πραγματοποιήσουν υπολογισμούς σε απλές συνθέσεις όπως οι ακόλουθες (Εικόνα 6).



Εικόνα 6

Οι μαθητές, στη συνέχεια, θα ασκηθούν περισσότερο στις ορθογώνιες κατασκευές από κύβους ώστε να μετρούν το πλήθος των κύβων με πιο συστηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας το πλήθος των κύβων της βάσης ως σύνθετη μονάδα την οποία επαναλαμβάνουν για να μετρούν το πλήθος των κύβων της κατασκευής, σε πραγματικό ή αναπαραστατικό υλικό (Εικόνα 7).



Εικόνα 7

Βαθμιαία, η προσέγγιση αυτή οδηγεί στον υπολογισμό των τύπων των βασικών στερεών, ως πολλαπλαστιαστική σχέση των διαστάσεων και απαραίτητων μετασχηματισμών.

Στις μεγαλύτερες τάξεις οι τύποι θα χρησιμοποιηθούν στην ανάπτυξη πιο σύνθετων υπολογισμών των όγκων των στερεών και άλλων συνθέσεων.

Στοχαστικά Μαθηματικά

Η θεματική ενότητα της **Στατιστικής** αναπτύσσεται σε τρεις τροχιές: *δεδομένα*, *μέτρα θέσης* και *μεταβλητότητα*.

- Η **πρώτη τροχιά «Δεδομένα»** αναφέρεται στη συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία διαφορετικής ποιότητας δεδομένων και εξελίσσεται για να συμπεριλάβει:
  - — κατηγορικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί (π.χ. παιχνίδια, χρώματα κ.λπ., βλ. Α΄ Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1),
  - — διακριτά ποσοτικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους είναι ακέραιοι αριθμοί π.χ. αριθμός δωματίων μιας κατοικίας, αριθμός παιδιών μιας οικογένειας, βλ. Β΄ Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1)
  - — συνεχή ποσοτικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι μόνο ακέραιοι αριθμοί π.χ. ύψος, βλ. Ε΄ Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1).

Οι τρόποι αναπαράστασης των δεδομένων που χρησιμοποιούν οι μαθητές εξελίσσονται από τους πιο απλούς σε πιο σύνθετους: διαγράμματα με υλικά, εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα (Α' κύκλος), διπλά ραβδογράμματα (Β΄ κύκλος), κυκλικά διαγράμματα, χρονοδιαγράμματα, διαγράμματα διασποράς, ιστογράμματα (Γ΄ κύκλος). Ανάλογα, η ερμηνεία των δεδομένων που αποσκοπεί στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τους μαθητές για τα δεδομένα που έχουν συγκεντρωθεί ξεκινά από την απλή ανάγνωση και σύγκριση των πληροφοριών (Α' κύκλος) και προχωρά στην εξαγωγή συμπερασμάτων (Β΄ κύκλος) και στην πραγματοποίηση προβλέψεων με βάση δείγματα πληθυσμών (Γ΄ κύκλος).

- Η **δεύτερη τροχιά «Μέτρα θέσης»** αφορά στη χρήση αριθμητικών εκφράσεων, οι οποίες επιτρέπουν τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων. Τα μέτρα θέσης εισάγονται σταδιακά στο Β΄ κύκλο και είναι η επικρατούσα τιμή (Γ΄ Δημοτικού), η διάμεσος (Δ΄ Δημοτικού) και η μέση τιμή (Ε΄ Δημοτικού). Τα μέτρα θέσης, στην υποχρεωτική εκπαίδευση, υπολογίζονται μόνο για διακριτά ποσοτικά δεδομένα.

- Η **τρίτη τροχιά «Μεταβλητότητα»** αναφέρεται σε αριθμητικές εκφράσεις που χαρακτηρίζουν τη διασπορά των δεδομένων. Στο Β΄ κύκλο εισάγεται το εύρος (Γ΄ Δημοτικού) και στο Γ΄ κύκλο η μέση απόλυτη απόκλιση (Γ΄ Γυμνασίου).

Παρακάτω, δίνεται ένα παράδειγμα για την τροχιά «Δεδομένα» που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου**.**

Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Δεδομένα»

Οι μαθητές συζητούν για τους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες και πραγματοποιούν μια έρευνα με αφορμή ερωτήματα όπως:

Α΄ κύκλος

— Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των μαθητών της τάξης τους; (Α΄ Δημοτικού)

— Πόσες μπάλες ομαδικών αθλημάτων (π.χ. μπάσκετ, ποδοσφαίρου κ.λπ.) έχουν στο σπίτι τους; (Β΄ Δημοτικού)

Β΄ κύκλος

— Πόσα μετάλλια κέρδισαν διάφορες χώρες στους τελευταίους Ολυμπιακούς αγώνες;

Πόσες χώρες κέρδισαν χάλκινα, ασημένια, χρυσά μετάλλια; (Γ΄ Δημοτικού)

— Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των κοριτσιών και των αγοριών της τάξης τους; (Δ΄ Δημοτικού)

— Ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών της τάξης τους στο αγώνισμα του δρόμου; (Ε΄ Δημοτικού)

— Ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών της Γ΄ Δημοτικού και της ΣΤ΄ Δημοτικού στο αγώνισμα του δρόμου; (ΣΤ΄ Δημοτικού)

Γ΄ κύκλος

— Πόσες χώρες έλαβαν μέρος στους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες (1896-σήμερα) και πόσες κέρδισαν μετάλλια; (Α΄ Γυμνασίου)

— Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των εφήβων; (Β΄ Γυμνασίου)

— Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων αθλητών στο αγώνισμα του μήκους; (Γ΄ Γυμνασίου).

Η θεματική ενότητα των **Πιθανοτήτων** αναπτύσσεται σε δύο τροχιές: *Πείραμα τύχης* και *Πιθανότητα ενδεχομένου*.

- Η **πρώτη τροχιά «Πείραμα τύχης»** αναφέρεται στην πραγματοποίηση πειραμάτων που μπορεί να επαναληφθούν πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και των οποίων τα αποτελέσματα δεν είναι προβλέψιμα. Η εμπλοκή των μαθητών σε πειράματα τύχης εξελίσσεται σταδιακά και περιλαμβάνει:

— πραγματοποίηση απλών πειραμάτων τύχης ενός σταδίου (π.χ. ρίψη ενός ζαριού) και εύρεση του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων τους (Α΄ κύκλος),

— πραγματοποίηση πολλών δοκιμών απλών πειραμάτων τύχης και διερεύνηση των αποτελεσμάτων τους (Β΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού),

— πραγματοποίηση πειραμάτων τύχης δύο σταδίων (π.χ. ρίψη δύο ζαριών) και εύρεση του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων τους (Β΄ κύκλος, ΣΤ΄ Δημοτικού),

— πραγματοποίηση σύνθετων πειραμάτων τύχης (Γ΄ κύκλος, Α΄ Δημοτικού),

— διάκριση ασυμβίβαστων και ανεξάρτητων ενδεχομένων (Γ΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού).

- Η **δεύτερη τροχιά «Πιθανότητα ενδεχομένου»** αφορά στον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου και αναπτύσσεται ως εξής:

— περιγραφή ενός ενδεχομένου ως βέβαιο, πιθανό, απίθανο, αδύνατο (Α΄ κύκλος, Α΄ Δημοτικού),

— σύγκριση ενδεχομένων ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους (λιγότερο πιθανό, περισσότερο πιθανό, ισοπίθανο) (Α΄ κύκλος, Β΄ Δημοτικού),

— εκτίμηση της πιθανότητας ενός γεγονότος σε μη αριθμητική κλίμακα (Β΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού),

— υπολογισμός της πιθανότητας ενός απλού ενδεχομένου με κλάσματα (Β΄ κύκλος, Ε΄ Δημοτικού),

— υπολογισμός της πιθανότητας ενός σύνθετου ενδεχομένου με τον κλασσικό ορισμό των πιθανοτήτων (Γ΄ κύκλος, Α΄ Δημοτικού),

— χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης και υπολογισμός πιθανότητας (Γ΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού).

Παρακάτω, δίνεται ένα παράδειγμα για την τροχιά «Πιθανότητα ενδεχομένου» που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Πιθανότητα ενδεχομένου»

Με αφορμή τη ρίψη ενός ζαριού που έχει 2 πλευρές κόκκινες, τρεις μπλε και 1 πράσινη, συζητούν ερωτήματα όπως:

Α΄ κύκλος

— Είναι πιθανό να τύχει μαύρο χρώμα; (Α΄ Δημοτικού)

— Είναι πιο πιθανό να τύχει το μπλε ή το κόκκινο χρώμα; (Β΄ Δημοτικού)

Β΄ κύκλος

— Πώς μπορούν να τοποθετηθούν σε μία μη αριθμητική κλίμακα τα ενδεχόμενα: μπλε, πράσινο, κίτρινο χρώμα; (Γ΄, Δ΄ Δημοτικού)

— Ποια είναι η πιθανότητα να τύχει το κόκκινο χρώμα; (Ε΄ Δημοτικού)

— Ποια είναι η πιθανότητα να τύχει το κόκκινο χρώμα και ποια είναι η συχνότητα εμφάνισης του κόκκινου χρώματος σε 20 ρίψεις του ζαριού; (ΣΤ΄ Δημοτικού)

Γ΄ κύκλος

— Ποια είναι η πιθανότητα, αν ρίξουμε δύο ίδια ζάρια, να τύχει και στα δύο ζάρια κόκκινο χρώμα; (Α΄ Γυμνασίου)

— Ποια είναι η πιθανότητα, αν ρίξουμε έξι φορές το ζάρι, να τύχει και τις έξι φορές το μπλε χρώμα; (Γ΄ Γυμνασίου)

Αξιολόγηση

Οι μορφές Αξιολόγησης, οι μέθοδοι, οι τεχνικές και τα εργαλεία που προτείνονται σε αυτή την ενότητα του Οδηγού του Εκπαιδευτικού έχουν στόχο να υποστηρίξουν τον εκπαιδευτικό στην εφαρμογή μέσα από τη διδακτική πράξη των βασικών αρχών της Αξιολόγησης που αναπτύσσονται στο Πρόγραμμα Σπουδών.

Τρία Εργαλεία για τρία επίπεδα αξιολόγησης

Η αξιολόγηση εστιάζεται σε τρία διαφορετικά επίπεδα και έχει διαφορετική μορφή και διαφορετικά εργαλεία σε κάθε επίπεδο. Το πρώτο επίπεδο αφορά στον ίδιο τον μαθητή και στην επίτευξη συγκεκριμένων ΠΜΑ. Το μοντέλο που προτείνεται περιλαμβάνει την κατάταξη των στρατηγικών – προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές, εργαζόμενοι σε δραστηριότητες τελικής ή διαμορφωτικής αξιολόγησης. Το δεύτερο επίπεδο εστιάζεται στη διδακτική πορεία (διδασκαλία) και προτείνεται ένα εργαλείο αυτοαξιολόγησης του εκπαιδευτικού. Στο τρίτο επίπεδο δίνεται έμφαση στην εξέλιξη της κάθε διδακτικής τροχιάς και ιδιαίτερα στα σημεία μετάβασης από τον έναν κύκλο στον επόμενο. Προτείνεται η χρήση του portfolio του κάθε μαθητή σε συνδυασμό με μια λίστα ελέγχου (checklist) των σημαντικών σημείων της τροχιάς σε κάθε κύκλο.

Εργαλείο 1

Η ανάλυση και ερμηνεία των απαντήσεων των μαθητών σε κάποια κατάσταση-πρόβλημα, είτε αυτό αντιμετωπίζεται στη συζήτηση στην τάξη είτε σε κάποιο γραπτό τεστ, είναι χρήσιμα στοιχεία για τον εκπαιδευτικό της τάξης προκειμένου να αντιληφθεί τις συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο κάθε μαθητής και να αποφασίσει για το είδος της διδακτικής παρέμβασης που κρίνεται απαραίτητη. Είναι αναγκαίος, λοιπόν, ο εντοπισμός της κύριας μαθηματικής ιδέας/ έννοιας του προβλήματος και η ταξινόμηση των απαντήσεων των μαθητών με βάση το βαθμό επίτευξης του στόχου της δραστηριότητας, της πληρότητας στην αντίληψη της βασικής μαθηματικής ιδέας/ έννοιας και, τέλος, της πληρότητας της αιτιολόγησης που αναπτύσσει ο μαθητής.

Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να βοηθήσει το επόμενο εργαλείο αξιολόγησης. Το προτεινόμενο μοντέλο αναπτύσσεται σε κλίμακα 4 επιπέδων αξιολόγησης των στρατηγικών – προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές σε δραστηριότητες αξιολόγησης και στηρίζεται στο μοντέλο ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των μαθητών σε «ανοικτού» τύπου δραστηριότητες του Αναλυτικού Προγράμματος *Mathematics in Context* (Smith, 2004, p.75)[2].

Αξιολογική κλίμακα τελικής αξιολόγησης	
4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν πλήρη αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγησή τους είναι σαφής, ολοκληρωμένη και περιλαμβάνει τη χρήση γραπτής, συμβολικής και εικονικής αναπαράστασης.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν μερική αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγησή τους κρίνεται ελλιπής μολονότι καταφέρνουν να «επικοινωνούν» την προσέγγισή που ακολουθείται.
2.	Περιορισμένη πρόοδο/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγηση κρίνεται ανεπαρκής, προβληματική και γεμάτη ασάφειες.
1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδο στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές φαίνεται να αγνοούν την κεντρική μαθηματική ιδέα της δραστηριότητας, ενώ αδυνατούν να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

Η εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου από τους εκπαιδευτικούς προϋποθέτει φυσικά την ανάλυση της μαθηματικής ιδέας/ έννοιας της δραστηριότητας. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, αρχικά γίνεται η σύνδεση της δραστηριότητας με τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών και ακολουθεί η δραστηριότητα. Στη συνέχεια, η ανάλυση και ταξινόμηση των πιθανών στρατηγικών – προσεγγίσεων στηρίζεται στην ανάλυση της κεντρικής έννοιας της δραστηριότητας.

Παραδείγματα Δραστηριοτήτων Αξιολόγησης:

ΣΤ΄ Δημοτικού: Στροφή

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

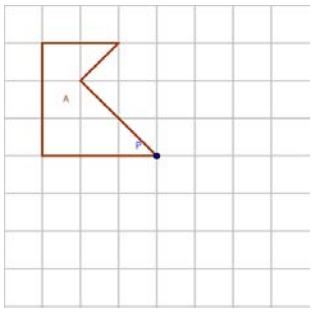
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	Βασικά θέματα
Γ10. *Περιγράφει ισοδύναμους μετασχηματισμούς που οδηγούν στην κατασκευή ίσων σχημάτων σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον.* Γ11. *Σχεδιάζει το συμμετρικό απλών γεωμετρικών σχημάτων ως προς τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα σε τετραγωνισμένο καμβά και με τη χρήση του γνώμονα.* *Γ12. Σχεδιάζει σχήματα με κέντρο συμμετρίας για*	***Μετασχηματισμοί και Συμμετρία*** • Μετατόπιση, στροφή και ανάκλαση • Αξονική συμμετρία • Κεντρική συμμετρία • Επικαλύψεις επιφανειών και

[2] Smith, M. E. (2004). Practices in Transition: A Case Study of Classroom Assessment. In T. A. Romberg (Ed.), *Standards-Based Mathematics Assessment in Middle School*. Teachers College Press.

διάφορες περιστροφές σε καμβάδες και σε ψηφιακό περιβάλλον. *Γ13. Αναγνωρίζει ποια σχήματα μπορούν να δώσουν ψηφιδωτά και χρησιμοποιεί στοιχειώδεις μετασχηματισμούς για την κατασκευή τους.*	μοτίβα

Στη δραστηριότητα αυτή θα σχεδιάσετε/ κατασκευάσετε (περιστροφές) στροφές του σχήματος Α γύρω από το σημείο Ρ.

1. Το σχήμα Α $_1$ που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος Α κατά 90^o σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα Α $_{1.}$
2. Το σχήμα Α $_2$ που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος Α κατά 180^o σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα Α $_{2.}$
3. Το σχήμα Α $_3$ που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος Α κατά 90^o αντίστροφα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα Α $_{3.}$



Ανάλυση της δραστηριότητας – Αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών

Η κύρια μαθηματική έννοια της δραστηριότητας αφορά στο μετασχηματισμό της (περι)στροφής ενός μη κυρτού 5-γωνου με σημείο περιστροφής μια κορυφή του. Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ανήκει στην ομάδα των μετασχηματισμών που διατηρεί το γεωμετρικό αντικείμενο αναλλοίωτο, δηλαδή διατηρεί τις ιδιότητές του αμετάβλητες. Ο μετασχηματισμός της στροφής περιλαμβάνει ένα αρχικό γεωμετρικό αντικείμενο, μια διαδικασία μετασχηματισμού και τη δημιουργία ενός νέου γεωμετρικού αντικειμένου ίσου με το αρχικό, το οποίο είναι, όμως, προϊόν του συγκεκριμένου μετασχηματισμού. Η ισότητα του τελικού αντικειμένου με το αρχικό δεν αποτελεί μοναδικό κριτήριο, καθώς η διαδικασία του μετασχηματισμού απαιτεί την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων.

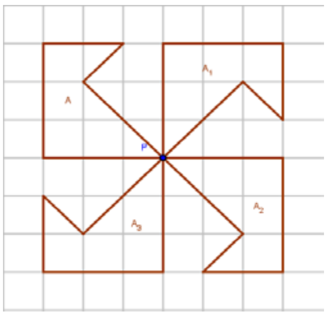
Οι πιθανές παρανοήσεις – ελλείψεις των μαθητών σχετικά με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια περιλαμβάνουν είτε την ισότητα των δύο αντικειμένων (αρχικό – τελικό) είτε την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων είτε τη διαδικασία του μετασχηματισμού (φορά περιστροφής – γωνία περιστροφής – σημείο περιστροφής).

Έτσι, είναι δυνατόν να ταξινομήσουμε τις απαντήσεις – προσεγγίσεις των μαθητών σύμφωνα με την αξιολογική κλίμακα σε 4 κατηγορίες:

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Η απάντηση-προσέγγιση των μαθητών φανερώνει ολοκληρωμένη αντίληψη της έννοιας του μετασχηματισμού της στροφής ενός γεωμετρικού σχήματος γύρω από ένα σημείο με συγκεκριμένη φορά και γωνία.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα βασικά σημεία της έννοιας του μετασχηματισμού της περιστροφής: • Ισότητα των δύο σχημάτων (αρχικό – τελικό) • 1 – 1 αντιστοιχία των σημείων των δύο αντικειμένων Η προσέγγισή τους, όμως, παρουσιάζει ελλείψεις σε ένα από τα παρακάτω απαραίτητα στοιχεία της διαδικασίας του μετασχηματισμού: • φορά περιστροφής • γωνία περιστροφής • σημείο περιστροφής
2.	Περιορισμένη πρόοδος/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της μαθηματικής ιδέας του μετασχηματισμού της περιστροφής (ανισότητα των δύο σχημάτων ή/ και έλλειψη 1-1 αντιστοιχίας των σημείων τους), αν και είναι δυνατόν να ακολουθείται η εφαρμογή της διαδικασίας περιστροφής (φορά – γωνία – σημείο περιστροφής).
1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές αδυνατούν να εφαρμόσουν τη διαδικασία περιστροφής ενός σχήματος γύρω από ένα σημείο. Πιθανές απαντήσεις είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν άλλα είδη μετασχηματισμών (μεταφορά, ανάκλαση) και να δημιουργήσουν ένα νέο σχήμα ίσο με το αρχικό.

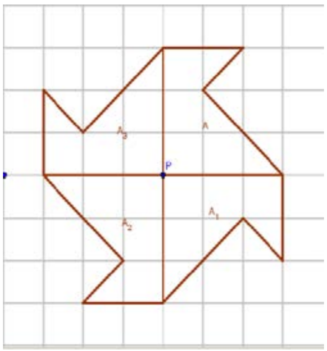
Πιθανές απαντήσεις

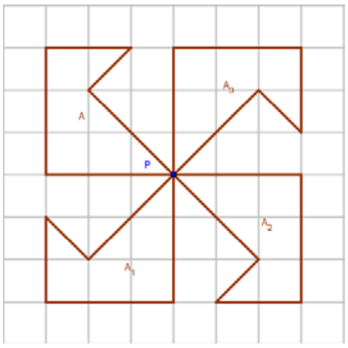
Κατηγορία 4



Κατηγορία 3

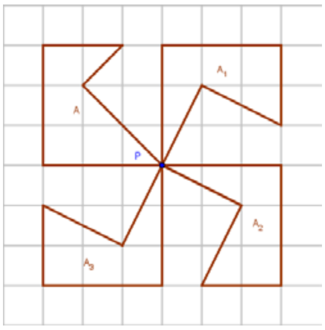
<u>Σημείο περιστροφής</u> <u>Φορά περιστροφής</u>

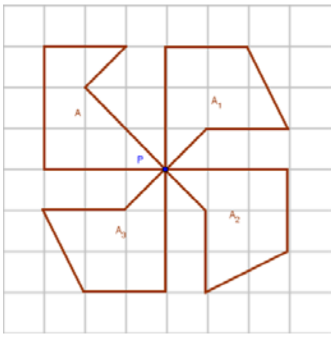




Κατηγορία 2

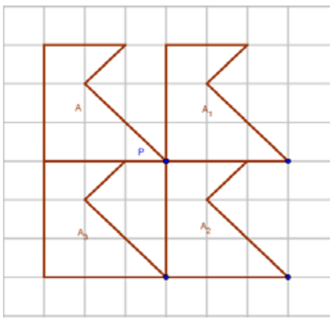
<u>Ισότητα σχημάτων</u> <u>1-1 αντιστοιχία</u>

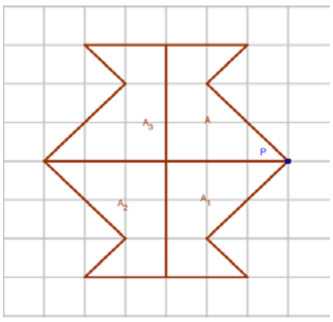




Κατηγορία 1

<u>Μεταφορά</u> <u>Συμμετρία</u>





Στ΄ Τάξη: «Λιγότερα λιπαρά» (ΑρΔ21, ΠΜΑ: Αρ4, Αρ8)

Αυτή η δραστηριότητα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως δραστηριότητα τελικής αξιολόγησης. Η κύρια μαθηματική έννοια της δραστηριότητας αφορά στην έννοια των ποσοστών. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν ότι τα δύο διαφορετικά ποσοστά που περιλαμβάνει η δραστηριότητα είναι ποσοστά δύο διαφορετικών ποσοτήτων. Τα ποσοστά, σε αντίθεση με τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς, δεν αναφέρονται σε μονάδες μέτρησης, αλλά στο μέρος μιας ολόκληρης ποσότητας. Επιπλέον, η απόλυτη σύγκριση των ποσοστών είναι δυνατή μέσω της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αλλά η σχετική σύγκρισή τους γίνεται μέσω του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα περιλαμβάνει και τα δύο είδη σύγκρισης ποσοστών. Το ελαφρύ γάλα περιέχει 2% λιπαρά, μια ποσότητα που είναι κατά 38% λιγότερη από εκείνη των λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα. Επομένως, οι μαθητές θα πρέπει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η ποσότητα των λιπαρών στο ελαφρύ γάλα, δηλαδή το 2%, ισοδυναμεί με το 62% (100% – 38%) της ποσότητας των λιπαρών στο πλήρες. Στη συνέχεια, μέσω της σχετικής σύγκρισης του 2% και του 62%, οι μαθητές θα υπολογίσουν μέσω διαίρεσης/ πολλαπλασιασμού το ζητούμενο συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα.

Μια πιθανή παρανόηση των μαθητών σε σχέση με τη συγκεκριμένη περίπτωση των ποσοστών περιλαμβάνει τη θεώρηση ότι τα δύο ποσοστά που δίνονται αναφέρονται στην ίδια ποσότητα. Άλλη παρανόηση είναι δυνατόν να αφορά την ερμηνεία της έκφρασης «… 38% λιγότερα λιπαρά…» και την ταύτισή της με την έκφραση «… 38% των λιπαρών». Τέλος, είναι πιθανόν οι μαθητές να δυσκολευτούν στον υπολογισμό της σχετικής σύγκρισης των ποσοστών 2% και 62% και να διαιρέσουν, για παράδειγμα, το 62 με το 2.

Έτσι, η ταξινόμηση των πιθανών στρατηγικών των μαθητών με βάση την αξιολογική κλίμακα έχει ως εξής:

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Η απάντηση- προσέγγιση των μαθητών φανερώνει ολοκληρωμένη αντίληψη της έννοιας των ποσοστών και του τρόπου αξιοποίησης της σχέσης των ποσοστών για τον υπολογισμό του ζητούμενου. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις δύο διαφορετικές συγκρίσεις ποσοστών που περιλαμβάνει η δραστηριότητα. Υπολογίζουν το ποσοστό των λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα και ισούται με το συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το ελαφρύ γάλα και, τέλος, συγκρίνουν το 62% με το 2% προκειμένου να υπολογίσουν το συνολικό ποσοστό των λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα βασικά σημεία της έννοιας των ποσοστών που εμπεριέχονται στη δραστηριότητα, αλλά παρατηρούνται λανθασμένες στρατηγικές υπολογισμού. Συγκεκριμένα, οι στρατηγικές τους φανερώνουν ότι κατανοούν ότι τα ποσοστά αναφέρονται σε διαφορετικές ποσότητες και υπολογίζουν ποιο ποσοστό λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα ισούται με το συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το ελαφρύ γάλα, αλλά στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν το συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα αδυνατούν να αντιληφθούν ποιο είναι το μέρος και ποιο το όλο και, πιθανότατα, διαιρούν το 62% με το 2% ή το 62 με το 2.
2.	Περιορισμένη πρόοδος/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της μαθηματικής ιδέας των ποσοστών που περιέχει η δραστηριότητα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές, μολονότι αντιλαμβάνονται ότι τα ποσοστά αναφέρονται σε δύο διαφορετικές ποσότητες, αδυνατούν να κάνουν τις συγκρίσεις είτε γιατί στην πρώτη σύγκριση παρερμηνεύουν το «38% λιγότερα» και θεωρούν ότι το 2% του ελαφρού γάλακτος ισούται με το 38% του πλήρους είτε γιατί στη δεύτερη σύγκριση θεωρούν ότι το 100% των λιπαρών του πλήρους ισούται με το 2% των λιπαρών του ελαφρού γάλακτος και προσπαθούν να υπολογίσουν το ποσοστό που ισούται με το 38% ή το 62%.

1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν ότι τα ποσοστά αναφέρονται σε δύο διαφορετικές ποσότητες. Πιθανές απαντήσεις είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν αριθμητικές πράξεις (προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις) με τους αριθμούς 62, 38 και 2.

Εργαλείο 2

Σε ένα δεύτερο επίπεδο αξιολόγησης εστιάζουμε στη διδακτική πορεία (διδασκαλία) και προτείνουμε ένα είδος αυτοαξιολόγησης του εκπαιδευτικού με τη βοήθεια ενός εργαλείου «αναστοχασμού». Αυτό το εργαλείο μπορεί να δώσει άμεσα πληροφορίες στον εκπαιδευτικό σχετικά με το αν η διδακτική πρακτική του στοχεύει στην ανάπτυξη τόσο των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως:

- η ικανότητα *αποτελεσματικής χρήσης εργαλείων*,
- η ικανότητα *αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες*,
- η ικανότητα *αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας,*

και της μαθηματικής (δημιουργικής, αναστοχαστικής, κριτικής) σκέψης, όσο και στην ανάπτυξη των ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών που προτείνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών:

- διεργασία συλλογισμού και επιχειρηματολογίας,
- διεργασία δημιουργίας συνδέσεων,
- διεργασία επικοινωνίας,
- διεργασία επιλογής και χρήσης εργαλείων,
- διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας.

Ως εργαλείο για την αξιολόγηση του δεύτερου αυτού επιπέδου προτείνεται μια εσχάρα αξιολόγησης, το Εργαλείο 2.

Αυτοαξιολόγηση			
4 **Πλήρης επίτευξη**	**3** **Μερική επίτευξη**	**2** **Περιορισμένη επίτευξη**	**1** **Ελάχιστη επίτευξη**

Χαρακτηριστικά διδασκαλίας	**4 | 3 | 2 | 1**	**Παρατηρήσεις / Βελτιώσεις**
1. Είναι εμφανής η σύνδεση μεταξύ των μαθησιακών δραστηριοτήτων και των διδακτικών στόχων;	☐ ☐ ☐ ☐	
2. Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι σημαντικό και περιγράφεται με ακρίβεια;	☐ ☐ ☐ ☐	
3. Δημιουργείται ένα περιβάλλον πρόκλησης και εμπλοκής των μαθητών για μάθηση;	☐ ☐ ☐ ☐	

4. Περιλαμβάνονται δραστηριότητες που απαιτούν διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων;	☐ ☐ ☐ ☐	
5. Δίνεται έμφαση στη διερεύνηση φαινομένων, στη διατύπωση και στον έλεγχο υποθέσεων, αλλά και στη συγκρότηση τεκμηριωμένων επιχειρημάτων;	☐ ☐ ☐ ☐	
6. Παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές για να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών, μέσα στα μαθηματικά και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου.	☐ ☐ ☐ ☐	
7. Αξιοποιούνται κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, προκειμένου να εκτελούν οι μαθητές συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες και να επιλύουν προβλήματα	☐ ☐ ☐ ☐	
8. Αξιολογείται η επίτευξη των διδακτικών στόχων;	☐ ☐ ☐ ☐	
9. Αξιολογείται το σύνολο των μαθητών;	☐ ☐ ☐ ☐	
10. Παρέχονται ευκαιρίες για εμβάθυνση;	☐ ☐ ☐ ☐	
Σημείωση: Κάθε χαρακτηριστικό που έχει σκορ κάτω από 3 είναι υποψήφιο για βελτίωση και θα πρέπει να μελετηθεί με προσοχή.	**Σύνολο: / 40**	

Εργαλείο 3

Στο τρίτο επίπεδο αξιολόγησης εστιάζουμε στην εξέλιξη/ πορεία της διδακτικής τροχιάς και ιδιαίτερα στα σημεία μετάβασης από τον έναν κύκλο στον επόμενο ή από τη μια τάξη στην επόμενη. Τα σημεία/κόμβοι της κάθε τροχιάς όπου θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να αξιολογήσει την επίτευξη ενός συνόλου ΠΜΑ στα οποία βασίζεται η εξέλιξη της τροχιάς. Επιπλέον, θα πρέπει να γνωρίζει ο εκπαιδευτικός το βαθμό επίτευξης των ΠΜΑ. Σε αυτό το επίπεδο, τα εργαλεία αξιολόγησης θα μπορούσαν να αποτελέσουν το portfolio του κάθε μαθητή και, επιπλέον, δραστηριότητες τελικής αξιολόγησης (Εργαλείο 1) σε συνδυασμό με μια λίστα ελέγχου (checklist) των σημαντικών σημείων της τροχιάς σε κάθε κύκλο/ τάξη. Αυτού του είδους η αξιολόγηση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για την αξιολόγηση του Προγράμματος Σπουδών προκειμένου να έχουμε μια εικόνα για το βαθμό επίτευξης των ΠΜΑ που έχουν τεθεί.

Ε΄ Δημοτικού / Φυσικοί αριθμοί	Επίτευξη			
ΠΜΑ	Ικανοποιητική	Μερική	Περιορισμένη	Ελάχιστη
Αρ1. Διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν αριθμούς σε μια ποικιλία από πλαίσια.				
Αρ2. Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του.				
Αρ3. Αναλύουν και συνθέτουν φυσικούς αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους.				
Αρ4. Διερευνούν τη σχέση των φυσικών αριθμών με τους κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς.				
Αρ5. Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με διαφορετικούς τρόπους καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και (τέλειας και ατελούς) διαίρεσης.				
Αρ6. Εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα αριθμητικών παραστάσεων που περιλαμβάνουν και τις τέσσερις πράξεις, συνειδητοποιώντας το ρόλο της παρένθεσης.				
Αρ7. Αναγνωρίζουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών των τεσσάρων πράξεων (διαίρεση: τέλεια, με μονοψήφιο διαιρέτη).				
Αρ8. Αναπτύσσουν και αξιοποιούν διαδικασίες εκτέλεσης/ αλγορίθμους των τεσσάρων πράξεων, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα (ανάμεσα στα οποία και αριθμομηχανή) και αναπαραστάσεις.				
Αρ9. Αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης/ αναπαράστασης καταστάσεων για να τις τεκμηριώσουν και να τις κοινοποιήσουν.				
Αρ10. Διερευνούν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών και τον χρησιμοποιούν για να κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης.				
Αρ11. Διατυπώνουν, αιτιολογούν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας των 2,3, 4, 5, 8, 9, 10 και 25.				

Εφαρμόζοντας εναλλακτικές μεθόδους και τεχνικές αξιολόγησης

Οι εναλλακτικές μορφές και τεχνικές αξιολόγησης αφορούν κυρίως στη διαμορφωτική αξιολόγηση, αξιοποιούνται, δηλαδή, από τον εκπαιδευτικό και τον μαθητή για ανατροφοδότηση της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας. Κάτω όμως από ορισμένες συνθήκες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τελική αξιολόγηση, όπως, για παράδειγμα, το πορτφόλιο προς το τέλος ενός σχολικού έτους.

Το πορτφόλιο (χαρτοφυλάκιο)

Τα πορτφόλιο, ως συλλογές έργων και εργασιών των μαθητών, μπορούν να σχεδιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αντιπροσωπευτικά των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών.

Η καλή χρήση των πορτφόλιο προϋποθέτει:

- Οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να οργανώνουν το πορτφόλιο τους μόνοι τους. Αυτό στις μικρές ηλικίες είναι δύσκολο. Θα χρειαστεί ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές περισσότερο ή λιγότερο, να δώσει κάποιες γενικές και ειδικές –ανά περίπτωση μαθητή- οδηγίες.
- Οι μαθητές να τροφοδοτούν το πορτφόλιο με υλικό τακτικά. Μπορεί να επιλέγουν να βάζουν κάθε εργασία ή μερικές από τις εργασίες τους.
- Οι εργασίες που επιλέγονται να είναι διαφορετικές ως προς το είδος, να έχουν μια ποικιλία, να παρέχουν πληροφορίες για μια ολοκληρωμένη κατά το δυνατόν εικόνα του κάθε μαθητή. Δηλαδή, οι εργασίες που ο κάθε μαθητής επιλέγει για να αντιπροσωπεύσει τη δουλειά του στα μαθηματικά να δίνουν στον εκπαιδευτικό που αξιολογεί το φάκελο μια εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο ο κάθε μαθητής ερμηνεύει τη δουλειά του, για τις διαθέσεις του απέναντι στα μαθηματικά, για το βαθμό κατανόησης συγκεκριμένων εννοιών και διαδικασιών.

Σημείωση 1: Επειδή το πορτφόλιο εμπλουτίζεται με εργασίες κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης χρονιάς – πιθανόν και περισσότερων χρόνων, πληρουμένων κάποιων συνθηκών - επιτρέπει στον εκπαιδευτικό, αλλά και στο μεγαλύτερο μαθητή – από Στ Δημοτικού και πάνω - να εξάγει κάποια συμπεράσματα για τα μαθησιακά του πρότυπα, τους τρόπους, δηλαδή, με τους οποίους μαθαίνει ευκολότερα και ‘προσφορότερα’ για τον ίδιο.

Σημείωση 2: Το πορτφόλιο μπορεί να τηρείται και ηλεκτρονικά στον υπολογιστή της τάξης ή στον υπολογιστή του εργαστηρίου Η/Υ του σχολείου και να περιλαμβάνει τόσο τις ηλεκτρονικά εκπονημένες εργασίες όσο και τις υπόλοιπες σκαναρισμένες.

Παραδείγματα εργασιών που μπορεί να περιλαμβάνει το πορτφόλιο

Γεωμετρία: Η τροχιά Γεωμετρικά Σχήματα

- Αρχικά σχέδια και αναγνώριση καθορισμένων σχημάτων (τετράπλευρο, πεντάπλευρο, κ.λπ.) από την περίοδο που οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του σχήματος (αρχή του πρώτου ηλικιακού κύκλου – Νηπιαγωγείο, Α΄ Δημοτικού).

- Σχέδια και αναγνώριση σχημάτων από την περίοδο που οι μαθητές μελετούν σε μεγαλύτερο βάθος την έννοια του σχήματος (Α΄ Δημοτικού – Β΄ Δημοτικού). Παράδειγμα: εκτυπώνεται η σελίδα με τα σχήματα που οι μαθητές κατασκευάζουν στο πλαίσιο της δραστηριότητας «Γραμμές και σχήματα» http://www.pi-schools.gr/software/dimotiko/ (ΠΣ, σ. 70-71).
- Κατασκευές με συνδυασμούς σχημάτων στο επίπεδο, όπως, για παράδειγμα, η ΓΔ6 (ΠΣ, σ. 96).
- Ομαδοποίηση επίπεδων και στερεών σχημάτων με βάση χαρακτηριστικά - ιδιότητες που ορίζει ο μαθητής.
- Τελικά σχέδια και κατασκευές που προτείνει ο εκπαιδευτικός με βάση τις ιδιότητες επίπεδων και στερεών σχημάτων που έχουν μελετηθεί στην τάξη με χρήση εμπράγματου υλικού και οργάνων, στο τέλος της διδασκαλίας της τροχιάς *Γεωμετρικά σχήματα* για τον 1^{ο} ηλικιακό κύκλο (τέλος της Β Δημοτικού).

Συνεχίζοντας στο 2^{ο} ηλικιακό κύκλο, από τη Γ Δημοτικού μπορούν να προστίθενται και νέες εργασίες σε συνέχεια της ίδιας τροχιάς, όπως για παράδειγμα:

- Σχέδια επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων πάνω σε διάφορους καμβάδες, κ.λπ.

Ημερολόγια

Τα ημερολόγια είναι ένα καλό εργαλείο για να αξιολογήσει ο εκπαιδευτικός ή και ο ίδιος ο μαθητής δεξιότητες επικοινωνίας. Επιπλέον, αποτελούν ένα ακόμη μονοπάτι για την αξιολόγηση των σκέψεων μέσα από τα γραπτά κείμενα των μαθητών σχετικά με τις ικανότητές τους να επικοινωνούν μαθηματικά, τις συμπεριφορές και τις διαθέσεις τους απέναντι στα μαθηματικά. Για να μπορεί αυτό το εργαλείο να χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά από την πλευρά των μαθητών, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται:

- να συζητήσει με τους μαθητές του και να μοιραστεί μαζί τους σκοπούς και τα πλεονεκτήματα της τήρησης ημερολογίου,
- να φροντίζει ώστε οι μαθητές να τηρούν συμβατικό ή ηλεκτρονικό ημερολόγιο με τακτικές ημερολογιακά καταχωρημένες σημειώσεις ώστε να μπορεί να ανατρέχει στις περασμένες σημειώσεις με άνεση,
- να δημιουργεί ευκαιρίες συζήτησης μεταξύ των μαθητών βασισμένες στις σημειώσεις τους και να ενθαρρύνει την ανταλλαγή ιδεών που έχουν αναπτύξει σε αυτές,
- να ανατροφοδοτεί τα ημερολόγια των μαθητών του με δικές του σκέψεις.

Παράδειγμα τήρησης ημερολογίου για την ΑΔ1, Γ΄ Γυμνασίου, ΠΣ σ.257

Οι μαθητές επιλέγουν να τηρήσουν ένα ημερολόγιο των ενεργειών και των σκέψεών τους για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Έχουν δίπλα στον υπολογιστή που εργάζονται ένα έντυπο ημερολόγιο ή κρατούν σημειώσεις ηλεκτρονικά σε αρχείο στον υπολογιστή παράλληλα με τη δουλειά τους στο Geogebra.

Οι σημειώσεις μπορούν να αναφέρονται στα παρακάτω:

- Τοποθετούν το πρόβλημα που πρόκειται να λύσουν στην αντίστοιχη μαθηματική περιοχή (κανονικότητες-συναρτήσεις,...), προσδιορίζουν το είδος του προβλήματος (είναι μια διερευνητική διαδικασία που...), προσδιορίζουν τι πρόκειται να διερευνήσουν.
- Εκφράζουν γραπτά τα συναισθήματά τους για το πρόβλημα (αισθάνονται ότι μπορούν να το λύσουν, φαίνεται ενδιαφέρον γιατί..., πιθανόν να συναντήσουν δυσκολίες γιατί...)
- Εκπονούν ένα διάγραμμα των ενεργειών που θα ακολουθήσουν για να απαντήσουν στο πρώτο ερώτημα (1ο βήμα:... 2^{ο} βήμα:... κ.λπ.). Αργότερα, επανέρχονται στο ημερολόγιο για το διάγραμμα των ενεργειών προκειμένου να απαντηθεί ένα δεύτερο ερώτημα κοκ.
- Καταγράφουν εικασίες για τη μεταβολή της γραφικής παράστασης προσπαθώντας να τις αιτιολογήσουν με βάση προηγούμενες εμπειρίες.

Μετά την εκτέλεση του προγράμματος επιστρέφουν και συμπληρώνουν στο ημερολόγιό τους:

- ποιες από τις εικασίες τους επιβεβαιώθηκαν και ποιες όχι, αιτιολογώντας και αναπτύσσοντας επιχειρήματα για τα ευρήματά τους,
- σχετικά με ποιες συγκεκριμένες έννοιες και ιδιότητες που αφορούν στη συνάρτηση $y = αx^2$ διευρύνθηκαν οι γνώσεις τους και οι δεξιότητές τους,
- σκέψεις που έκαναν σχετικά με την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Οι συζητήσεις που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού μπορούν να εστιάζουν:

α) στους διαφορετικούς τρόπους σχεδιασμού των ενεργειών από τους μαθητές,

β) στις διαφορετικές γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν από τις τιμές στο x και το α που έθεσαν οι μαθητές κατά τη διερεύνησή τους και τις σχέσεις μεταξύ των γραφικών παραστάσεων,

γ) σε επιπλέον λύσεις που πιθανόν δεν προβλέφτηκαν από τους μαθητές και προτείνει ο εκπαιδευτικός,

δ) στην εγκυρότητα των λύσεων εφόσον τίθεται τέτοιο θέμα,

ε) στη δημιουργία μιας λίστας των διδακτικών εργαλείων και των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος.

Η ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού μπορεί να αναφέρεται σε ζητήματα, όπως:

- χρήση από τον μαθητή της κατάλληλης μαθηματικής γλώσσας και ορολογίας (μη γραμμική συνάρτηση, ο ρόλος της μεταβλητής α, μεταβολή του ψ, μοναδιαία μεταβολή του x κ.λπ.),
- κατανόηση των ζητούμενων του προβλήματος από τον μαθητή,
- βαθμός συνειδητοποίησης των ενεργειών από τον μαθητή μέσα από την εκπόνηση του διαγράμματος των ενεργειών,
- αιτιολογήσεις-ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τον μαθητή.

Συνεντεύξεις

Οι συνεντεύξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό για να αξιολογήσει τη γνωστική και συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών μέσω μιας ποικιλίας στρατηγικών:

- Επεξήγηση: οι μαθητές παρουσιάζουν σε συμμαθητές τους αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών χρησιμοποιώντας κατάλληλη μαθηματική γλώσσα.
- Ανακατεύθυνση: οι μαθητές απαντούν σε εκμαιευτικές ερωτήσεις που τους οδηγούν σε πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες και ιδέες.
- Επιμερισμός: οι μαθητές χρησιμοποιούν παραδείγματα για να εξηγήσουν αλγορίθμους και διαδικασίες.
- Εφαρμογή: οι μαθητές εφαρμόζουν τη γνώση τους.

Παράδειγμα συνέντευξης για τη θεσιακή αξία των ψηφίων (Αριθμοί, Β΄ Δημοτικού)

~ Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν διάφορες εκφράσεις για ένα δοσμένο αριθμό. Για παράδειγμα, ο 145: 145 μονάδες, 14 δεκάδες και 5 μονάδες, 1 εκατοντάδα, 4 δεκάδες και 5 μονάδες, 10 δεκάδες και 45 μονάδες,...). Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν χειραπτικό υλικό ή άλλο τρόπο για να αναπαραστήσουν τις διαφορετικές εκφράσεις που σκέφτηκαν.

~ Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να κάνουν το ίδιο για τον αριθμό 104, καθοδηγώντας τους με κατάλληλες ερωτήσεις να κατανοήσουν την αξία του 0 στον αριθμό 104.

~ Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τις διαδικασίες που ακολούθησαν για να βρουν τον αριθμό που λείπει (συμπλήρωμα) στην παρακάτω αριθμητική πρόταση: 26+__ = 44

Το παρακάτω απόσπασμα είναι ένας διάλογος - συνέντευξη μεταξύ της εκπαιδευτικού και μιας μαθήτριας, της Ε, που είχε βάλει 22 στην κενή θέση. Η εκπαιδευτικός ζήτησε από την Ε να πει πώς σκέφτηκε:

Ε: Από το 20 για να πάω στο 40 (έβαλα) 20, από τα 6 στα 4 (έβαλα) 2,
άρα, σύνολο 22.

Δ.: Δηλαδή, Ε, 26+22 μας κάνει 44;

Η Ε κάνει την πρόσθεση οριζόντια 26+22=48.

Ε: Όχι, κάνει 48. Κάτι έκανα λάθος….

Η εκπαιδευτικός φέρνει τον άβακα.

Δ.: Θέλεις να ξανακάνουμε την πράξη με τον άβακα;

Ε: Ναι!

Δ: Δείξε μου στον άβακα το 26.

Η Ε βάζει 2 Δ (εκάδες) και 6 Μ (ονάδες).

Δ: Πόσα θέλεις τώρα;

Ε: Άλλα 20, δηλ. 2 Δ.

Δ: Πόσα έχεις τώρα;

Ε: (*μετράει)* 46. Θα βγάλω 2 Μ για να γίνουν 44.

Δ: Θυμάσαι τι έκανες από την αρχή;

Ε: Έβαλα 20 και έβγαλα 2.

Δ**:** Δηλαδή, πόσα έβαλες;

Ε**:** 20-2=18.

~ Οι μαθητές κατασκευάζουν ένα μη τετριμμένο, αλλά ρεαλιστικό, λεκτικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους παραπάνω αριθμούς που να λύνεται με τη συγκεκριμένη μαθηματική ισότητα. Ανταλλάσσουν τα προβλήματά τους και τα λύνουν.

Παρατήρηση

Η παρατήρηση είναι ένα σπουδαίο εργαλείο που ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει για να αξιολογήσει τους μαθητές του στην τάξη την ώρα που δρουν. Ωστόσο, η συλλογή και διαχείριση των πληροφοριών που αποκομίζει ο εκπαιδευτικός με την παρατήρηση συνιστά μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία. Οι παρακάτω υποδείξεις μπορεί να φανούν χρήσιμες ώστε ο εκπαιδευτικός να μην 'χαθεί' στα δεδομένα:

~ Ο εκπαιδευτικός παρατηρεί έχοντας στο μυαλό του κάποιο στόχο. Έτσι, περιορίζει τον αριθμό και το εύρος των πληροφοριών από την παρατήρηση. Η παρατήρηση παρέχει στον εκπαιδευτικό την ευκαιρία να αξιολογήσει τις ικανότητες των μαθητών στο να επικοινωνούν μεταξύ τους μαθηματικά, να εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες, να επιλύουν προβλήματα, να συνεργάζονται με άλλους συμμαθητές τους και με τον εκπαιδευτικό.

~ Δεν έχουν όλα τα παιδιά την ίδια ανάγκη παρατήρησης. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ορίσει συγκεκριμένο χρόνο που θα παρατηρήσει έναν μαθητή ώστε να επικεντρώσει την προσοχή του σε αυτόν.

~ Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να μην ενοχλεί τους μαθητές όταν εργάζονται προσηλωμένοι. Αναλαμβάνει το ρόλο του συμμετέχοντος παρατηρητή που είναι ταυτόχρονα ενεργό μέλος της κοινότητας μάθησης, αλλά και εξωτερικός παρατηρητής του περιβάλλοντος στο οποίο η μάθηση λαμβάνει χώρα.

Μερικά αποτελεσματικά μέσα για τη συλλογή των πληροφοριών από παρατήρηση:

- Κάρτες σημειώσεων και μολύβι για την καταγραφή των παρατηρήσεων.
- Ανάπτυξη και χρήση από τον εκπαιδευτικό μια λίστας επιθυμητών συμπεριφορών και πράξεων από μέρους του μαθητή.
- Χρήση ενός μαγνητοφώνου τσέπης για τη μαγνητοφώνηση των υπαγορευόμενων παρατηρήσεων.
- Εύρεση του κατάλληλου μέρους της τάξης από όπου θα γίνουν οι παρατηρήσεις.
- Χρήση βιντεοκάμερας (εάν και εφόσον εξασφαλισθεί άδεια και συναίνεση για τη χρήση της) για την καταγραφή των παρατηρήσεων.

- Συζήτηση των πληροφοριών από παρατήρηση με τους μαθητές με σκοπό να διερευνηθούν τα αίτια πίσω από πράξεις, συμπεριφορές και μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποίησαν, καθώς και οι όποιες παρανοήσεις τους σχετικά με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.

Παράδειγμα παρατήρησης για τη Μέτρηση Δ΄ Δημοτικού (ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ3)

~ Χρήση οργάνων μέτρησης. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός παρατηρεί πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν το χειροποίητο μοιρογνωμόνιο στη ΜΔ1 για τη μέτρηση της γωνίας και πώς υπολογίζουν το μέτρο της.

~ Επιλογή κατάλληλων μονάδων μέτρησης. Για παράδειγμα, στη ΜΔ3 ο εκπαιδευτικός παρατηρεί εάν και πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν υποδιαιρέσεις της μονάδας μέτρησης επιφάνειας.

~ Επιλογή και χρήση άτυπης και τυπικής κατάλληλης ορολογίας. Για παράδειγμα, *η γωνία είναι «μικρότερη από 90º», «οξεία».*

~ Η παρατήρηση του εκπαιδευτικού για τις μετρήσεις των μαθητών κατά τη διεξαγωγή της ΜΔ1 τον οδηγεί στο να παρακινήσει τους μαθητές να παρουσιάσουν στους συμμαθητές τους τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποίησαν το μοιρογνωμόνιο, να συγκρίνουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους και να εξάγουν συμπεράσματα.

~ Επέκταση της αποκτηθείσας εμπειρίας των μαθητών στην επιλογή και χρήση μονάδων και εφαρμογή δεξιοτήτων μέτρησης στην καθημερινότητα. Για παράδειγμα, χρήση του χειροποίητου μοιρογνωμονίου ΜΔ1 για τη μέτρηση των γωνιών του γνώμονά τους.

Αξιολόγηση συνθετικής εργασίας

Η αξιολόγηση μιας συνθετικής εργασίας εξετάζει το βαθμό ανάπτυξης των ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών που προτείνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιεί εργαλεία και τεχνικές που περιγράφηκαν στις εναλλακτικές μεθόδους αξιολόγησης.

Αξιολόγηση συνθετικής εργασίας 2 (Α΄ - Β΄ Δημοτικού)
«Ο δικός μας κήπος: παρακολουθώντας την ανάπτυξη των φυτών στην τάξη»

(Η εκπαιδευτικός υπογραμμίζει στον παρακάτω πίνακα αυτές τις προτάσεις που ταιριάζουν σε κάθε δυάδα μαθητών και συμπληρώνει δικά της σχόλια)

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο	***Ως προς τη συνεργασία των μαθητών μεταξύ τους, των μαθητών με τον εκπαιδευτικό, όλων στην ολομέλεια (επικοινωνία)***
Οι μαθητές: Απαριθμούν ένα-ένα, δύο-δύο, τρία-τρία, πέντε-πέντε (μέχρι το 20, 50, 100). Δεν απαριθμούν το ίδιο αντικείμενο δύο	• Βαθμός συνεννόησης (υψηλός – μέτριος – μικρός) • Βαθμός αυτονομίας και αυτενέργειας (δεν ζητούν βοήθεια – ζητούν λίγη

φορές (αντιστοίχιση 1 προς 1) Ομαδοποιούν δυάδες, τριάδες,... αντικειμένων για να διευκολυνθούν στη μέτρηση Πραγματοποιούν μέτρηση του ύψους και - απαγγέλουν το σωστό φυσικό αριθμό - δεν απαγγέλουν το σωστό φυσικό αριθμό [3] Αναγνωρίζουν την ανάγκη κοινής μονάδας μέτρησης του ύψους (ναι-όχι) Καταγράφουν τις μετρήσεις στο πινακάκι στο κατάλληλο κουτάκι - με ευκολία - με μικρή βοήθεια - μόνο με βοήθεια[4] Υπολογίζουν τις διαφορές μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων - με ευκολία - με μικρή βοήθεια - μόνο με βοήθεια[5]	βοήθεια – δεν μπορούν μόνοι) • Ιεράρχηση ενεργειών (άριστη ιεράρχηση – καλή ιεράρχηση – δεν ξέρουν πώς και με τι να αρχίσουν) • Βαθμός ισοτιμίας στη σχέση-κατανομή ενεργειών (κυριαρχεί ο ένας – μοιράζονται το έργο) • Διαφοροποίηση (μαθητής με δυσκολίες συμμετέχει ενεργά – συμμετέχει λίγο – δεν συμμετέχει) • Περιμένουν τη σειρά τους για να μιλήσουν στην ολομέλεια (μιλάνε μόνο μερικοί – μιλάνε όλοι) • Γίνεται διάλογος (ακούει ο ένας τον άλλον και ανταποκρίνεται) • Ακούνε προσεκτικά τις οδηγίες – υποδείξεις της εκπαιδευτικού
Ως προς τις ιδέες – στρατηγικές των μαθητών (συλλογισμός και επιχειρηματολογία)	***Ως προς την επιλογή και χρήση του υλικού (εργαλεία και μέσα) – δεξιότητες***
Χρησιμοποίησαν στρατηγικές (για την απαρίθμηση) - που ανακάλεσαν από την τάξη - πρωτότυπες - αποτελεσματικές - που οδήγησαν γρήγορα και άμεσα σε αποτελέσματα Χρησιμοποίησαν - άτυπη μονάδα μέτρησης ύψους	Δεξιότητες χειρισμού του χάρακα (τοποθέτηση, ανάγνωση της ένδειξης, λεπτές κινήσεις, ακριβείς μετρήσεις,... Χειρισμός ψαλιδιού Χρήση κόλλας Χρήση λωρίδων (άτυπες μονάδες μέτρησης ύψους) – κόβουν ισόπαχες και ισομήκεις λωρίδες Χρήση αριθμητηρίου ή μικρών κύβων

[3] Η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τη μέθοδο της συνέντευξης για να διερευνήσει τη σκέψη των μαθητών. Ενδεικτικές ερωτήσεις: Πώς το υπολογίσατε; (μπορεί να διαβάζουν το χαρακάκι από πάνω προς τα κάτω, βλ. και χρήση εργαλείων)

[4] Όπως στο 1.

[5] Όπως στο 1.

(...) και την μέτρησαν με χαρακάκι - μόνο χαρακάκι - κάτι άλλο Μπορούσαν να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους στους συμμαθητές τους - εύκολα και κατανοήσιμα - με σχετική ευκολία - δύσκολα	για την απαρίθμηση των φύλλων (με αντιστοίχιση) για την απαρίθμηση των μίσχων (με αντιστοίχιση) για την εύρεση της διαφοράς – συμπληρώματος των μετρήσεων
Παρατηρήσεις – συμπεράσματα της εκπαιδευτικού	Παρατηρήσεις – συμπεράσματα της εκπαιδευτικού
Ως προς τις συνδέσεις με τα άλλα μαθήματα	***Αξιολόγηση μέσα από:***
Ελληνική Γλώσσα (... ώρες) Ανθολόγιο.. Άλλο βιβλίο..	Έκφραση συναισθημάτων, ερωτήσεις-απαντήσεις, θεατρικό δρώμενο, αναπαράσταση,...
Μελέτη περιβάλλοντος (....ώρες) Παρακολούθηση εικόνων, φιλμ, ντοκιμαντέρ	Συζήτηση • σέβονται τη σειρά • αναπτύσσουν τις ιδέες τους • εκφράζουν τα συναισθήματά τους, διατυπώνουν κρίσεις,...
Εικαστικά (... ώρες) Κατασκευή λωρίδων Κατασκευή κολάζ	Επιλογή χρωμάτων Επιλογή εικόνων Αισθητικό αποτέλεσμα
Αναστοχασμός εκπαιδευτικού	
Η συνθετική εργασία ήταν επιτυχημένη γιατί.. Ιδιαίτερη εντύπωση μου έκανε... Στην επόμενη συνθετική εργασία θα προσέξω να..	

Γ΄ ΚΥΚΛΟΣ

Αριθμοί και Άλγεβρα

Βασικά θέματα: Φυσικοί αριθμοί

Διαιρετότητα (Α΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η ευκλείδεια διαίρεση, η διαιρετότητα και η ανάλυση των φυσικών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι έννοιες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της αριθμητικής δομής των φυσικών και των πράξεων των ρητών (μέσω των ισοδύναμων κλασμάτων). Επιπλέον, οι έννοιες αυτές παρουσιάζουν αναλογίες με έννοιες που εμφανίζονται στην άλγεβρα (παραγοντοποίηση πολυωνύμων, πράξεις κλασματικών παραστάσεων).

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές στο Δημοτικό σχολείο έχουν διαπραγματευθεί τις έννοιες και τις διαδικασίες της διαιρετότητας με συγκεκριμένους φυσικούς. Σε αυτή την ενότητα επιχειρείται η συμβολική διατύπωση της ταυτότητας της ευκλείδειας διαίρεσης, μια διερεύνηση απλών ιδιοτήτων της διαιρετότητας (πχ. ο 7 διαιρεί το 21, άρα θα διαιρεί και το 210 που είναι πολλαπλάσιο του 21), η συστηματική χρήση της ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (πχ. στην εύρεση του ΕΚΠ και ΜΚΔ), καθώς και μια πρώτη επαφή των μαθητών με την αιτιολόγηση.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται κυρίως με:

- την ιδέα ότι ένας αριθμός μπορεί να γραφεί με διαφορετικούς τρόπους χωρίς να αλλάζει (πχ. για να εξετάσουν αν ο αριθμός $15 \cdot 34$ διαιρείται με το 15, κάποιοι μαθητές μπορεί να υπολογίσουν πρώτα το γινόμενο ώστε να κάνουν μετά τη διαίρεση),
- την αιτιολόγηση ισχυρισμών και συμπερασμάτων (ίσως να μην αναγνωρίζουν την ανάγκη αιτιολόγησης και συχνά δυσκολεύονται να διατυπώσουν επιχειρήματα).

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η εξοικείωση των μαθητών με κάποια από τα περιεχόμενα της ενότητας στο Δημοτικό αποτελεί πλεονέκτημα για την πρώτη επαφή τους με τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο. Η έμφαση εδώ είναι τόσο στη γενίκευση (ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης) όσο και στην αιτιολόγηση ισχυρισμών και την επιχειρηματολογία. Γι' αυτό το λόγο, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ευκαιρίες συζήτησης, επιχειρηματολογίας και αυτοαξιολόγησης των προτάσεων και των στρατηγικών τους. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να διευκολύνει με κατάλληλες ερωτήσεις (όπως "γιατί;", "πως το σκέφτηκες;", "ισχύει πάντα;", "τι λέτε για την ιδέα του συμμαθητή σας;" κ.λπ.). Η ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, εκτός από ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, είναι χρήσιμο και διδακτικά, αφού επιτρέπει γενικεύσεις (πχ. στην εύρεση του ΕΚΠ και του ΜΚΔ) και αιτιολογήσεις (πχ. στο γιατί ο 15 διαιρεί τον $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$). Η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών μπορεί να αποκτά νόημα μέσα από μαθηματικά προβλήματα και ρεαλιστικές καταστάσεις.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Α΄ Γυμνασίου: ΑρΔ1

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να διερευνήσουν οι μαθητές τις έννοιες του κοινού διαιρέτη και του ΜΚΔ. Πρόκειται για ένα πρόβλημα με περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις (ανοικτό). Μέσα από προβλήματα αυτού του είδους διευκολύνεται η διερεύνηση των μαθητών και αποκτά αξία η επιχειρηματολογία. Αν και από την πρώτη διερεύνηση των μαθητών οι αναμενόμενες απαντήσεις είναι συγκεκριμένοι αριθμοί (2, 4, 8), οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού μπορούν να οδηγήσουν σε αιτιολογήσεις και σε γενικεύσεις, ακόμα και στον κανόνα εύρεσης του ΜΚΔ (ως γινόμενο των κοινών παραγόντων στον μικρότερο εκθέτη). Για παράδειγμα, μια ερώτηση όπως: "πως ξέρουμε ότι δεν υπάρχει και κάποιο πολλαπλάσιο του 8 που να είναι ο ζητούμενος αριθμός;" μπορεί να οδηγήσει στην αναγκαιότητα ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η ερώτηση "αν οι αριθμοί που βγαίνουν από τη μηχανή ήταν οι 36, 60, 144 και 216, ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός με τον οποίο μπορεί να πολλαπλασιάζει η μηχανή;" μπορεί να οδηγήσει στην ιδέα του ΜΚΔ. Τέλος, οι μαθητές θα μπορούσαν να "ανακαλύψουν" έναν τρόπο να βρίσκουν την απάντηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα για οποιουσδήποτε αριθμούς (δηλαδή, τον κανόνα εύρεσης του ΜΚΔ).

Διεργασία διερεύνησης, γενίκευσης και επιχειρηματολογίας

Διεργασία επικοινωνίας μέσω φυσικής γλώσσας και συμβολισμών

Η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι αναγκαία για την "ανακάλυψη" των κανόνων εύρεσης του ΜΚΔ και του ΕΚΠ.

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

1. Ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι, όταν διαιρούνται με 3, δίνουν υπόλοιπο 2; Ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι, όταν διαιρούνται με 3, δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου;

   Σχόλιο: Η πρώτη ερώτηση έχει ως στόχο την εφαρμογή της ευκλείδειας διαίρεσης και τη χρήση μιας απλής αλγεβρικής παράστασης (3κ+2) για να εκφραστεί η απάντηση. Η δεύτερη ερώτηση έχει ως στόχο τη διερεύνηση με βάση την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

2. Ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο κάθε 4 ημέρες, ο Μιχάλης κάθε 5 ημέρες και ο Μαρίνος κάθε 8 ημέρες. Αν σήμερα παίζουν ποδόσφαιρο και οι τρεις μαζί, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.

   Σχόλιο: Ο στόχος είναι η χρήση του ΕΚΠ σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα. Η επίλυση του προβλήματος από τους μαθητές μπορεί να στηρίζεται σε διαισθητικές προσεγγίσεις (πχ. ο Αντρέας θα παίξει ποδόσφαιρο μετά από 4, 8, 12, … μέρες, ο Μιχάλης μετά από 5, 10,15, … μέρες, ο Μαρίνος μετά από 8, 16, 24, … μέρες, άρα, κοινή μέρα θα είναι η 40ή). Αυτή η προσέγγιση μπορεί να αξιοποιηθεί για την ανάδειξη της έννοιας του ΕΚΠ.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, από το υπάρχον σχολικό βιβλίο (Α΄ Γυμνασίου, έκδοση 2010) μπορούν να αξιοποιηθούν οι παράγραφοι 1.4 και 1.5.

Από το διαδίκτυο:

- http://nrich.maths.org/content/id/5578/Chains.xls (παράγοντες και διαιρέτες)
- http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Arithmetic/Eratosthenes.shtml (κόσκινο του Ερατοσθένη)
- http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_202_g_3_t_1.html (ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με δεντροδιάγραμμα)

Βασικά θέματα: Φυσικοί Αριθμοί

Θεσιακά συστήματα αρίθμησης (Α΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η αξία θέσης των ψηφίων στη συμβολική γραφή των φυσικών είναι σημαντική τόσο για την κατανόηση των αριθμών και τη σύγκρισή τους, όσο και για την κατανόηση των αλγορίθμων εκτέλεσης των πράξεων. Η ενασχόληση των μαθητών με κάποιο θεσιακό σύστημα αρίθμησης εκτός του δεκαδικού, μπορεί να υποβοηθήσει την κατανόηση των ψηφίων που χρησιμοποιούμε και της αξίας της θέσης τους σε ένα αριθμητικό σύστημα.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Στο Δημοτικό έχουν αξιοποιηθεί δραστηριότητες που αναδεικνύουν στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών, δηλαδή το ρόλο της θέσης στην αξία ενός ψηφίου. Σε αυτή την ενότητα επιχειρείται μια εμβάθυνση, μέσω της ενασχόλησης με ένα σύστημα αρίθμησης διαφορετικό του δεκαδικού (το δυαδικό) που είναι όμως θεσιακό (όπως και το δεκαδικό).

Δυσκολίες των μαθητών: Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται με:

- το ότι το 2 και το 10 έχουν τους ίδιους ρόλους (βάσεις) στα διαφορετικά συστήματα αρίθμησης
- την ιδέα ότι ένας αριθμός μπορεί να γραφεί με διαφορετικούς τρόπους χωρίς να αλλάζει (πχ. ο 7 στο δεκαδικό, γράφεται 111 στο δυαδικό) και αντίστροφα, το ίδιο σύμβολο αναπαριστά διαφορετικούς αριθμούς σε διαφορετικά συστήματα (πχ. το 11 αναπαριστά διαφορετικούς αριθμούς στο δεκαδικό και στο δυαδικό).

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Ξεκινώντας από γνωστές έννοιες και διαδικασίες (αξία ψηφίων), οι μαθητές μπορούν να επιχειρήσουν μια επέκτασή τους στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Ο στόχος των δραστηριοτήτων των μαθητών είναι η βαθύτερη κατανόηση των στοιχείων ενός θεσιακού συστήματος αρίθμησης και πιο συγκεκριμένα, ο ρόλος των δυνάμεων του 10 και του 2 στην ανάλυση και τη γραφή ενός αριθμού και η διαφορετική αξία που έχει ένα ψηφίο ανάλογα με τη θέση του. Η μετατροπή από ένα σύστημα σε ένα άλλο είναι απαραίτητη για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, αλλά δεν αποτελεί αυτοσκοπό.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Α΄ Γυμνασίου: ΑρΔ3

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να εμπλακούν οι μαθητές σε διερεύνηση και αναστοχασμό της αξίας θέσης των ψηφίων στα δύο συστήματα και του ρόλου των δυνάμεων του 2 στο δυαδικό σύστημα. Έτσι, αν και οι πρώτες σκέψεις των μαθητών μπορεί να στηρίζονται σε απλοϊκές μεθόδους (πχ. δοκιμή και έλεγχο), η αναζήτηση όλων των αριθμών που θα μπορούσαν να έχουν το χαρακτηριστικό που περιγράφεται οδηγεί σε μια πιο συστηματική διερεύνηση που μπορεί να περιέχει ερωτήσεις όπως "ποια ψηφία μπορεί να έχει ένας τετραψήφιος στο δυαδικό;", "ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος από τους τετραψήφιους στο δυαδικό και πως γράφονται στο δεκαδικό;". Η γραφή του αριθμού ως ανάπτυγμα είναι ένα επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτής της δραστηριότητας (πχ. $11_{10}=1\cdot 10+1\cdot 1$, ενώ $1011_2= 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 1$).

Διεργασία διερεύνησης

Διεργασία αναστοχασμού για τις στρατηγικές που εφαρμόζουν

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση συμβόλων για την αναπαράσταση αριθμών

Ενδεικτική δραστηριότητα που δεν περιέχεται στο ΠΣ:

1. Ξεκινώντας από μια πρόσθεση στο δεκαδικό σύστημα (πχ. 183+918), καλούνται οι μαθητές να εξηγήσουν τον αλγόριθμο κάθετης εκτέλεσής της. Κατόπιν, τους ζητείται να κάνουν με ανάλογο τρόπο μια πρόσθεση στο δυαδικό σύστημα (πχ. 101+111). Στόχος είναι να αναδειχθούν οι ρόλοι των δυνάμεων του 2 και των ψηφίων που χρησιμοποιούνται και να κατανοηθούν οι αναλογίες με το δεκαδικό σύστημα.

Εκπαιδευτικό υλικό: Από το σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου το ιστορικό σημείωμα των σελ. 22–23. Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορεί επίσης να αξιοποιηθεί υλικό από το Υπ. Παιδείας της Κύπρου (http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika).

Επίσης, από το διαδίκτυο:

- http://nrich.maths.org/5722
- http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/BinaryHistory.shtml

Βασικά θέματα: Πραγματικοί αριθμοί

Ακέραιοι (Α΄ Γυμνασίου), Ρητοί (Α΄ Γυμνασίου), Άρρητοι–Πραγματικοί (Β΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Οι αριθμοί και οι πράξεις τους είναι στο κέντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, τόσο ως απαραίτητο στοιχείο μαθηματικού γραμματισμού, όσο και ως θεμελιώδεις ιδέες για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και γνώσης. Η σταδιακή επέκταση από τους φυσικούς στους ακέραιους, στους ρητούς και στους πραγματικούς παρέχει ευκαιρίες ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας από την μέτρηση και την απαρίθμηση μέχρι την διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων και συναρτήσεων.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές από μικρές ηλικίες χειρίζονται καθημερινές καταστάσεις που χρησιμοποιούν ακεραίους (π.χ το θερμόμετρο, το ασανσέρ κ.λ.π.) και στο Δημοτικό έχουν έρθει σε μια πρώτη διαισθητική επαφή με αυτούς και την πρόσθεσή τους. Έχουν εξοικειωθεί με τους κλασματικούς (και τους δεκαδικούς) αριθμούς και τις πράξεις τους, αν και είναι αναμενόμενο να παραμένουν δυσκολίες και παρανοήσεις (σχετικά με το τι μπορεί να παριστάνει ένα κλάσμα, με το αν είναι αριθμός, με την ισοδυναμία κλασμάτων, με πράξεις μεταξύ κλασμάτων κ.λπ.). Στην Α΄ Γυμνασίου θα ασχοληθούν πιο συστηματικά με τους ακεραίους ώστε να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και ιδιότητες και θα διερευνήσουν τις πράξεις τους καταλήγοντας σε σχετικά συμπεράσματα. Η χρήση της έννοιας του κλάσματος θα οδηγήσει στην επέκταση από τους ακέραιους στους ρητούς αριθμούς και τις πράξεις τους, επιδιώκοντας κατανόηση των αντίστοιχων εννοιών, ιδιοτήτων και σχέσεων, αλλά και ικανοποιητική ευχέρεια στην επίλυση προβλημάτων και την εκτέλεση υπολογισμών. Τέλος, στην Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα γνωρίσουν την ύπαρξη των αρρήτων, οι οποίοι μαζί με τους ρητούς αποτελούν τους πραγματικούς αριθμούς.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τους ακέραιους αριθμούς αφορούν κυρίως:

- την πρόσθεση ετερόσημων (επειδή ανάγεται σε αφαίρεση φυσικών),
- την αφαίρεση (επειδή μετασχηματίζεται σε πρόσθεση),
- τους διαφορετικούς ρόλους του "–" (ως πρόσημο και ως σύμβολο της αφαίρεσης),
- το πώς προκύπτουν οι "κανόνες των πρόσημων" στον πολλαπλασιασμό.
- το ρόλο της παρένθεσης και την απαλοιφή της.

Οι δυσκολίες των μαθητών όσον αφορά τους ρητούς σχετίζονται κυρίως με:

- τις ερμηνείες του κλάσματος (πχ ως σχέση μέρους–όλου) και κυρίως ως αποτέλεσμα της διαίρεσης ακεραίων και ως σημείο της αριθμογραμμής (στα δύο τελευταία δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σ' αυτή την ενότητα),
- την ισοδυναμία κλασμάτων, ιδιαίτερα με την αναγνώριση δύο ισοδύναμων κλασμάτων ως ίσων, δηλαδή ότι αναπαριστούν τον ίδιο αριθμό και αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής,
- τη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών (πχ. μπορεί να μην αναγνωρίζουν το $\frac{3}{5}$ και το 0,6 ως τον ίδιο αριθμό) και ιδιαιτέρως όταν αυτή είναι περιοδική (πχ. ο 0,33… συχνά αναγνωρίζεται ως άρρητος ή ταυτίζεται με τον 0,33)
- την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών, δηλαδή ότι μεταξύ δύο διαφορετικών ρητών υπάρχει πάντα ρητός αριθμός σε αντίθεση με τους ακέραιους, και ότι κάθε ακέραιος έχει επόμενο σε αντίθεση με τους ρητούς,

- τις πράξεις μεταξύ ρητών, τον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων, την προτεραιότητα των πράξεων, το ρόλο της παρένθεσης και την απαλοιφή της.

Επιπλέον, σχετικά με τη συμβολική διατύπωση ιδιοτήτων και σχέσεων (που συναντούν για πρώτη φορά οι μαθητές στην ενότητα των ρητών), δυσκολία παρουσιάζουν:

- η χρήση του γράμματος ως γενικευμένου αριθμού (στη διατύπωση των ιδιοτήτων των πράξεων),
- ο ρόλος του "–" ως δηλωτικό του αντίθετου (–α) ενός αριθμού α και η σύγχυση αυτού του ρόλου με εκείνον του πρόσημου (ο –α δεν είναι κατ' ανάγκη αρνητικός).

Σημεία που μπορεί να δυσκολεύουν τους μαθητές σχετικά με τους άρρητους, είναι:

- η δεκαδική αναπαράστασή τους (δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη εικόνα της δεκαδικής αναπαράστασης ενός άρρητου) και η σύγχυση μεταξύ άρρητου και ρητής προσέγγισής του (πχ. μεταξύ του π και του 3,14 ή μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του 1,41),
- η ηλικία και το επίπεδο μαθηματικής σκέψης που δεν επιτρέπουν (για τους περισσότερους μαθητές) μια αιτιολόγηση του γιατί δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα.

Τέλος, συχνά υπάρχουν δυσκολίες αναγνώρισης και ταξινόμησης ενός αριθμού ως φυσικού, ακέραιου, ρητού ή άρρητου που συνδέονται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των αριθμών (πχ. ο 1/3 μπορεί να θεωρείται ρητός ενώ ο $0,\overline{3}$ άρρητος, ο 2 μπορεί να θεωρείται ακέραιος αλλά όχι ρητός, κ.λπ.)

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Όσον αφορά τις πράξεις ακεραίων, η επιδίωξη είναι η απόδοση νοήματος και όχι η απομνημόνευση κανόνων χωρίς νόημα. Για το σκοπό αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάποια μοντέλα (όπως οι θετικές και αρνητικές μάρκες) και μεταφορές (όπως η κίνηση στην αριθμογραμμή ή η μεταβολή θερμοκρασίας). Ακόμη κι όταν οι μαθητές έχουν διατυπώσει τους κανόνες (π.χ της πρόσθεσης), η απόκτηση ευχέρειας στις πράξεις χρειάζεται χρόνο, στη διάρκεια του οποίου είναι θεμιτή η παράλληλη χρήση των μοντέλων–μεταφορών με τους κανόνες. Επιπλέον, η χρήση πολλαπλών μοντέλων βοηθά στην διερεύνηση διαφορετικών πλευρών και δίνει περισσότερες δυνατότητες επιλογών στους μαθητές. Έτσι, για την πρόσθεση μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μάρκες, το θερμόμετρο και η κίνηση στην αριθμογραμμή (η οποία μπορεί να επεκταθεί και στο άθροισμα πολλών προσθετέων με ή χωρίς παρενθέσεις). Για την αφαίρεση οι μάρκες και το θερμόμετρο, με στόχο την κατανόηση του μετασχηματισμού της αφαίρεσης σε πρόσθεση. Για τον πολλαπλασιασμό προτείνεται η χρήση συνδυασμού μοντέλων και τρόπων διερεύνησης (επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, αριθμογραμμή, κανονικότητες κ.λπ.). Η διαίρεση μπορεί να επεκταθεί από τους φυσικούς στους ακεραίους ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού (πχ. για το πηλίκο (–12):(–3) θα πρέπει να σκεφτούμε με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το –3 ώστε να προκύψει γινόμενο –12).

Σχετικά με τους "διαφορετικούς" ρόλους του "–" (ως πρόσημο και ως σύμβολο αφαίρεσης) χρειάζεται χρόνος για να γίνει κατανοητό από τους μαθητές ότι αυτοί οι ρόλοι δεν είναι ασύμβατοι και να αποκτηθεί η αναγκαία ευελιξία στη μετάβαση από τον ένα ρόλο στον άλλο, δηλαδή στην αυτόματη αντιμετώπιση της αφαίρεσης ως πρόσθεση. Για το σκοπό αυτό μπορούν να αξιοποιούνται διδακτικά διαφορετικές οπτικές που μπορεί να διατυπώνουν οι μαθητές κατά τις συζητήσεις τους, όπως, για παράδειγμα, κάποιος που στην παράσταση 3–5 βλέπει το "–" ως αφαίρεση, ενώ κάποιος άλλος ως πρόσημο (και κάνει πρόσθεση).

Ξεκινώντας από ερμηνείες του κλάσματος (σχέση μέρους–όλου, λόγος) και αναπαραστάσεις (εμβαδά, λωρίδες) που είναι γνωστές από το Δημοτικό, οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν στην ιδέα του θετικού ρητού ως κλάσμα, δηλαδή ως αριθμού με διαφορετικές αναπαραστάσεις (ως διαφορετικά αλλά ισοδύναμα κλάσματα, ως δεκαδικού, ως πηλίκου και ως σημείου στην αριθμογραμμή). Σε αυτή την ιδέα στηρίζεται και η ιδιότητα της πυκνότητας, η οποία μπορεί να αναδειχθεί μέσα από δραστηριότητες αναζήτησης ενός ρητού ανάμεσα σε δύο άλλους και ενός ρητού που να είναι ο "πλησιέστερος" σε κάποιον άλλο. Η αναπαράσταση των ρητών στην ευθεία μπορεί να υποστηρίζει αποτελεσματικά την κατανόηση αυτών των εννοιών και ιδιοτήτων. Για την απεικόνιση των ρητών στην ευθεία προαπαιτείται η κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού και η ευελιξία στη σύγκριση κλασμάτων (ή κλάσματος με ακέραιο, δεκαδικό, κ.λπ.) και ίσως χρειάζεται συζήτηση στην τάξη για αυτές τις πτυχές.

Οι πράξεις των ακεραίων επεκτείνονται στους ρητούς μέσα από προβλήματα και δραστηριότητες που δίνουν νόημα στους υπολογισμούς και αναδεικνύουν την αναγκαιότητά τους. Κάποια από τα προβλήματα μπορούν να σχετίζονται με βασικές πλευρές της έννοιας του θετικού ρητού (προβλήματα ποσοστών, αναλογιών, τόκου κ.λπ.) και κάποια άλλα να εμπλέκουν και αρνητικούς ρητούς (προβλήματα μεταβολής θερμοκρασίας, κέρδους – ζημίας, κ.λπ.). Επιπλέον, με κατάλληλες δραστηριότητες μπορούν να συζητούνται παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τις πράξεις όπως ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνουν τον αρχικό αριθμό ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση τον μικραίνουν. Η ευχέρεια στις υπολογιστικές τεχνικές και την προτεραιότητα των πράξεων είναι σημαντική, χωρίς να είναι αναγκαία η εξάσκηση σε υπερβολικά πολύπλοκες παραστάσεις. Η απαλοιφή παρενθέσεων μπορεί να προσεγγιστεί είτε μέσω του αντιθέτου (πχ. οι $-(6-7{,}2)$ και $-6+7{,}2$ είναι ίσοι, ως αντίθετοι του $6-7{,}2$) είτε μέσω του πολλαπλασιασμού με το -1 (πχ. $-(6-7{,}2)=(-1)\cdot(6-7{,}2)=(-1)\cdot 6+(-1)\cdot(-7{,}2)$). Τέλος, η κατανόηση ότι οι πράξεις είναι δύο, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός, είναι ένα επιθυμητό αποτέλεσμα, αλλά αυτό δεν μπορεί να αναμένεται αμέσως με την εισαγωγή των πράξεων των ρητών.

Στην ενότητα των ρητών εμφανίζεται για πρώτη φορά η διατύπωση των ιδιοτήτων των πράξεων σε συμβολική μορφή, δηλαδή το γράμμα ως γενικευμένος αριθμός (ως "οποιοσδήποτε αριθμός" σε μια σχέση που ισχύει πάντα – για όλους τους αριθμούς). Οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει το γράμμα ως άγνωστο (σε εξισώσεις) και ως μέγεθος (πχ. στον τύπο $E=\beta\cdot\upsilon$) και αργότερα θα το συναντήσουν ως μεταβλητή (στις συναρτήσεις) και ως παράμετρο. Οι δυσκολίες των μαθητών στη χρήση του γράμματος ως γενικευμένου αριθμού σχετίζονται ακριβώς με τη διεργασία της γενίκευσης και μπορούν να αντιμετωπίζονται με συνεχή υποστήριξη από συγκεκριμένα παραδείγματα. Με την ίδια προσέγγιση (γενίκευση συγκεκριμένων περιπτώσεων) μπορεί να επιδιωχθεί η κατανόηση του ρόλο του "–" ως δηλωτικό του αντίθετου (–α) ενός αριθμού α.

Οι τετραγωνικές ρίζες μπορούν να εισαχθούν μέσα από προβλήματα (πχ. εμβαδών, Πυθαγορείου θεωρήματος, κ.λπ.) αναδεικνύοντας την αναγκαιότητα χρήσης τους, η οποία με τη σειρά της οδηγεί στους άρρητους αριθμούς. Οι μετατροπές μεταξύ των αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών (κλασματική, δεκαδική με πεπερασμένο πλήθος ή με άπειρο πλήθος επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων) και το άπειρο πλήθος ψηφίων (που δεν επαναλαμβάνονται) των αρρήτων, μπορούν να αποτελέσουν μια ικανοποιητική – για αυτή την ηλικία – ένδειξη για το ότι οι άρρητοι δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα. Η ύπαρξη αριθμών με άπειρα, μη περιοδικά ψηφία μπορεί να υποστηριχθεί με την προσπάθεια προσέγγισης συγκεκριμένων αρρήτων (πχ. διαδοχικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$, παράλληλα με αναφορές σε πίνακες με δεκάδες χιλιάδες ψηφίων του που μπορούν να βρεθούν στο διαδίκτυο), αλλά και στην κατασκευή τέτοιων αριθμών στην τάξη (πχ. ο 2,1010010001…). Παραδείγματα σαν το τελευταίο είναι χρήσιμα για να αποφευχθεί η σύνδεση των αρρήτων αποκλειστικά με τις τετραγωνικές ρίζες φυσικών αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα. Οι δραστηριότητες εύρεσης ρητών προσεγγίσεων των αρρήτων (τετραγωνικών ριζών) και αναπαράστασής τους στην αριθμογραμμή, παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες αισθητοποίησης αυτών των αριθμών. Συγχρόνως, θα πρέπει να επισημαίνεται η διάκριση μεταξύ αρρήτου και της ρητής προσέγγισής του.

Η "κατασκευή" του συνόλου των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς και τους άρρητους, θα πρέπει να συνδυαστεί με την εικόνα της ευθείας των πραγματικών (η αριθμογραμμή των φυσικών που επεκτάθηκε για να περιλάβει τους ακέραιους και μετά τους ρητούς και πάνω σε αυτήν βρήκαμε σημεία που αναπαριστούν και άρρητους όπως το $\sqrt{2}$).

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου: ΑρΔ4

Η δραστηριότητα αποτελεί μια εισαγωγή στην πρόσθεση ακεραίων και έχει ως στόχο την "ανακάλυψη" του ορισμού της πρόσθεσης και των αντίθετων ως αριθμών με άθροισμα μηδέν. Χρησιμοποιείται το μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών, το οποίο μπορεί να στηριχτεί σε χειραπτικό υλικό (πχ. κόκκινα και μαύρα πούλια ή χαρτάκια με "+" και άλλα με "–") ή σε εικονικές αναπαραστάσεις (πχ το +5 μπορεί να παρασταθεί με +++++). Πλεονεκτήματα αυτού του μοντέλου είναι η άμεση σχέση του με τη συμβολική γραφή του αθροίσματος (η ύπαρξη 5 θετικών καρτών και 2 αρνητικών συμβολίζεται με (+5)+(–2), ενώ, για παράδειγμα, η κίνηση στην αριθμογραμμή μπορεί να οδηγήσει στη γραφή +5–2) και η πρόσβαση στην ιδέα των αλληλοαναιρούμενων ποσοτήτων που οδηγεί στους αντίθετους αριθμούς. Τα δύο πρώτα ερωτήματα της δραστηριότητας έχουν

Διεργασία επιλογής και χρήσης χειραπτικού υλικού

Διεργασία διερεύνησης και γενίκευσης (κανόνες της ως στόχο την εξοικείωση των μαθητών με το πλαίσιο του προβλήματος και τη χρήση του μοντέλου σε προσθέσεις που (διαισθητικά και σε άλλα πλαίσια) έχουν ήδη συναντήσει στο δημοτικό. Το τρίτο και το τέταρτο ερώτημα καλούν τους μαθητές να κάνουν προσθέσεις με χρήση των καρτών και κατόπιν να επιχειρήσουν γενικεύσεις για τους πιθανούς κανόνες της πρόσθεσης. Είναι πιθανό να απαιτηθεί αρκετή συζήτηση μεταξύ των μαθητών για να φτάσουν στη γενίκευση (ιδιαίτερα στο τέταρτο ερώτημα) και ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει με κατάλληλες ερωτήσεις.

πρόσθεσης)

Διεργασία επικοινωνίας μέσω φυσικής γλώσσας και συμβολισμών

Υποστηρικτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αρχείο Α Γυμ-ΑρΔ4-Πρόσθεση ακεραίων.ggb του Geogebra όπου οι μαθητές μπορούν να μεταβάλουν με τη χρήση δρομέων τους δύο αριθμούς και να εμφανίζονται οι αντίστοιχες θετικές και αρνητικές κάρτες. Το λογισμικό παρέχει βοήθεια στους μαθητές στην περίπτωση που χρησιμοποιούν λάθος αριθμούς (πχ ομόσημους ενώ η δραστηριότητα αναφέρεται σε ετερόσημους) και στην περίπτωση αλληλοαναιρούμενων θετικών και αρνητικών καρτών (ίδιου αριθμού).

Διεργασία επιλογής και χρήσης ψηφιακών εργαλείων

Α΄ Γυμνασίου: ΑρΔ6

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή στην αφαίρεση ακεραίων. Ο στόχος της είναι να ανακαλύψουν και να διατυπώσουν οι ίδιοι οι μαθητές τον ορισμό της αφαίρεσης ως πρόσθεση με τον αντίθετο του αφαιρετέου. Η χρήση των θετικών και αρνητικών καρτών έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να οδηγήσει στην ιδέα του μετασχηματισμού της αφαίρεσης σε πρόσθεση. Για παράδειγμα, για την αφαίρεση (+3)–(–5), δηλαδή για να αφαιρεθούν 5 αρνητικές κάρτες ενώ έχουμε μόνο 3 θετικές, θα πρέπει πρώτα να προστεθούν 5 "ζεύγη του μηδενός" δηλαδή 5 θετικές και 5 αρνητικές κάρτες, ώστε να μπορούν μετά να αφαιρεθούν οι 5 αρνητικές. Έτσι όμως, το αποτέλεσμα είναι (+3)+(+5), αφού έμειναν οι 5 θετικές κάρτες. Μετά την εξοικείωση των μαθητών με το πλαίσιο της κατάστασης και τη συμβολική έκφραση της αφαίρεσης (ερώτημα α), το ερώτημα (β) έχει ως στόχο τη διερεύνηση καταστάσεων όπου η πρόσθεση (αντιστοίχως αφαίρεση) θετικών καρτών μπορεί να φέρει τα ίδια αποτελέσματα με την αφαίρεση (αντιστοίχως πρόσθεση) αρνητικών. Στο (γ) προσδοκούμε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την εισαγωγή ζευγαριών του μηδενός (πχ 5 θετικές και 5 αρνητικές κάρτες) ώστε να μπορέσουν να αντιμετωπίσουν το ερώτημα. Για την αποφυγή πιθανών συγχύσεων, η ομάδα έχει 0 πόντους και πρέπει να της αφαιρεθούν 5 θετικές κάρτες (ως "ποινή" ή λόγω των κανόνων του παιχνιδιού). Αυτό ίσως είναι και το δυσκολότερο έργο γιατί απαιτεί εφευρετικότητα και χρόνο. Στο ερώτημα (δ) είναι χρήσιμο

Διεργασία επιλογής και χρήσης χειραπτικού υλικού

Διεργασία επικοινωνίας μέσω φυσικής γλώσσας και συμβολισμών

Διεργασία διερεύνησης και επιχειρηματολογίας

Διεργασίες γενίκευσης και μεταγνωστικής ενημερότητας (για τις στρατηγικές που ακολούθησαν) να συνεχίσουν οι μαθητές να σκέφτονται με βάση τις κάρτες πριν επιχειρηθεί μια γενίκευση στο (ε) ερώτημα. Απαιτείται να αφιερωθεί αρκετός χρόνος (ιδιαίτερα για τα ερωτήματα β, γ και ε) στη συζήτηση μεταξύ των μαθητών και μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού, μέσα στις ομάδες των μαθητών και στο σύνολο της τάξης. Ο εκπαιδευτικός είναι προτιμότερο να επιλέξει το ρόλο του συντονιστή της συζήτησης (που ίσως χρειαστεί με κατάλληλες ερωτήσεις να βοηθήσει τους μαθητές στην εστίαση των συζητήσεων) και όχι του καθοδηγητή ή και λύτη της άσκησης.

Α΄ Γυμνασίου: **ΑρΔ9**

Ο στόχος είναι η ενημερότητα των μαθητών για τις ιδιότητες των πράξεων των ρητών και την προτεραιότητά τους, κατά τον υπολογισμό μιας αριθμητικής παράστασης. Το ζητούμενο είναι η ανάπτυξη μιας συζήτησης στην τάξη που θα αναδεικνύει μαθηματικές έννοιες, ιδιότητες και συμβάσεις, και θα βοηθά τους μαθητές να συνειδητοποιούν το "γιατί" και όχι μόνο το "πως" σε αυτό που κάνουν. Παρόμοιοι στόχοι μπορούν να υπηρετούνται και από δραστηριότητες όπου δίνονται κάποια πιθανά αποτελέσματα μιας αριθμητικής παράστασης και ζητείται η ερμηνεία του πως μπορεί να προέκυψαν αυτά και η αναγνώριση των λαθών.

Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας (για τις υπολογιστικές τεχνικές)

Διεργασία επικοινωνίας μέσω φυσικής γλώσσας και συμβολισμών

Β΄ Γυμνασίου: **ΑρΔ1**

Μέσα από αυτό το πρόβλημα (ή άλλα παρόμοια) μπορεί να αναδειχθεί η ανάγκη χρήσης τετραγωνικών ριζών και η διερεύνηση της ύπαρξης αριθμών που δεν είναι ρητοί. Η αναζήτηση της πλευράς ώστε το εμβαδόν της αίθουσας να είναι 32 m^2, μπορεί να γίνει με υπολογιστή, ώστε να διευκολυνθεί η προσπάθεια διαδοχικών προσεγγίσεων. Η επιδίωξη είναι να πιθανολογήσουν οι μαθητές ότι αυτή η διαδικασία "δεν θα τελειώσει ποτέ" και να οδηγηθούν στην ιδέα του αριθμού που μετά την υποδιαστολή έχει άπειρα ψηφία μη περιοδικά. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη φάση της διερεύνησης είναι να θέτει ερωτήματα που θα οδηγήσουν τις αναζητήσεις και τη συζήτηση στα παραπάνω. Μετά από τη διερεύνηση, θα χρειαστεί να αναλάβει ο ίδιος κάποιο μέρος από τη ρητή διατύπωση εννοιών (τετραγωνική ρίζα, άρρητος), των χαρακτηριστικών τους και των μαθηματικών συμβολισμών, αφού δεν μπορεί αυτά να αναμένονται εξ ολοκλήρου από τους μαθητές.

Διεργασία διερεύνησης και διατύπωσης υποθέσεων

Διεργασία επικοινωνίας μέσω φυσικής γλώσσας και συμβολισμών

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

1. Οι μαθητές καλούνται να "διπλώσουν" την αριθμογραμμή των θετικών ακεραίων που έχουν χρησιμοποιήσει στο δημοτικό, ώστε να κατασκευάσουν μια "πλήρη" αριθμογραμμή, η οποία να περιέχει και τους αρνητικούς ακεραίους. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με χρήση υλικών (λωρίδα χαρτιού) είτε νοερά.

Κατόπιν, η αναπαράσταση των ακεραίων σε μια ευθεία χρησιμοποιείται για την σύγκριση – διάταξή τους και την κατανόηση της έννοιας της απόλυτης τιμής (ως απόσταση από το 0) και των αντιθέτων (ως ετερόσημων με ίσες αποστάσεις από το 0). Για περισσότερο δυναμική προσέγγιση της δίπλωσης, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν το αρχείο Α Γυμ-1-Ακέραιοι στην αριθμογραμμή.ggb του Geogebra όπου στρέφοντας την ευθεία των φυσικών αριθμών κατά 180^o εμφανίζονται οι αρνητικοί αριθμοί. Ο εκπαιδευτικός μπορεί εδώ να χρησιμοποιήσει τη συγκεκριμένη αναπαράσταση και να επιδιώξει την εστίαση των μαθητών στην απόσταση των αντίθετων αριθμών από το 0 ως μια αρχική προσέγγιση της απόλυτης τιμής.

2. Χρησιμοποιώντας την ιδέα της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, οι μαθητές διερευνούν τον πολλαπλασιασμό ετερόσημων ακεραίων. Για παράδειγμα, το γινόμενο "5 φορές το –3" (5·(–3)) θα μπορούσε να υπολογιστεί ως (–3)+(–3)+(–3)+(–3)+(–3). Αυτό μπορεί να στηριχτεί και στο μοντέλο των καρτών (σε μία ομάδα που έχει 0 πόντους προσθέτουμε πέντε τριάδες αρνητικών καρτών) είτε στην κίνηση στην αριθμογραμμή (πέντε βήματα μήκους 3, όλα προς τα αριστερά). Για τη διερεύνηση του γινομένου αρνητικών, οι μαθητές μπορούν να προκληθούν να χρησιμοποιήσουν τις κανονικότητες (πχ. … (–3)(+3)=–9, (–3)(+2)=–6, (–3)(+1)=–3, (–3)·0=0, (–3)(–1)=;), όπως επίσης και την ιδέα ότι το γινόμενο (–3)(–2) θα πρέπει να διαφέρει από το (–3)(+2). Ίσως βοηθήσουν και παραλληλισμοί όπως: "ο αντίπαλος του συμπαίκτη μου είναι αντίπαλός μου" και "ο αντίπαλος του αντιπάλου μου είναι συμπαίκτης μου" (πχ. σε κάποιον υποτιθέμενο αγώνα ποδοσφαίρου). Αν οι συνθήκες της τάξης το επιτρέπουν μπορεί να παρουσιαστεί και μια άτυπη "απόδειξη" (πχ. (–3)(+2)+(–3)(–2)=(–3)(+2–2)=0 άρα –6+(–3)(–2)=0, οπότε θα πρέπει (–3)(–2)=+6).
3. Στο δημοτικό σχολείο οι μαθητές γνώρισαν τον "ελληνικό πολλαπλασιασμό", τον οποίο χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι έλληνες για να κάνουν την πράξη με τους συμβολισμούς που είχαν για τους αριθμούς (πχ το 12 το έγραφαν ιβ). Σύμφωνα με αυτόν, το γινόμενο 24·35 θα γραφόταν 20·30+20·5+4·30+4·5, θα γίνονταν οι επιμέρους πολλαπλασιασμοί και τέλος οι προσθέσεις. Μετά από μια υπενθύμιση αυτού του αλγόριθμου, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν αν είναι πάντα ακριβής και να εξηγήσουν τη γνώμη τους. Ο στόχος είναι μέσα από τη συζήτηση να αναδειχθεί η επιμεριστική ιδιότητα. (παρακάτω φαίνεται τμήμα της σελ 74 του βιβλίου του μαθητή της Γ΄ Δημοτικού)

	30	5
20	20 x 30 = ...	20 x 5 = ...
4	4 x 30 = ...	4 x 5 = ...

- Συμπλήρωσε τα γινόμενα μέσα στα πλαίσια του διπλανού σχήματος.
- Υπολόγισε το γινόμενο 24 x 35.


Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

Ο Ευτόκιος από την πόλη Ασκαλών στη Μέση Ανατολή, έζησε γύρω στον 5ο αιώνα μ.Χ. και έγραψε πολλά βιβλία με σχόλια σε μαθηματικά κείμενα του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου του Περγαίου (σπουδαίων Ελλήνων μαθηματικών), οι οποίοι έζησαν αρκετούς αιώνες πριν απ' αυτόν. Ο Ευτόκιος στα σχόλια ενός βιβλίου του Αρχιμήδη εξηγεί και παρουσιάζει (γράφοντας τους αριθμούς με γράμματα όπως τους έγραφαν οι Αρχαίοι Έλληνες) τον **ελληνικό πολλαπλασιασμό**.

4. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

x	3,2					
-x		–3	5			
-(-x)				2/3		
|x|					6	
|-x|						0,45

Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η διερεύνηση του ρόλου του "–" ως πρόσημο και ως σύμβολο αντιθέτου. Οι συζητήσεις χρειάζεται να αναδείξουν ότι το "–" στο –x δεν δηλώνει το πρόσημο.

5. Υπολογίζοντας την αριθμητική παράσταση $\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 1 + 3\cdot\frac{5}{2}$, το σωστό αποτέλεσμα είναι: α) –8, β) 8,5 γ) 7,5 δ) –9 ε) άλλο.

Σχόλιο: Κάθε άλλη απάντηση από τη σωστή (β) προκύπτει από λανθασμένη χρήση της προτεραιότητας των πράξεων. Έτσι, αυτή η δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την αξιολόγηση των δεξιοτήτων των μαθητών και την ανατροφοδότηση της διδασκαλίας, με συζήτηση στην τάξη.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία: Για τους ακέραιους από τις παρ. 7.1 έως 7.6 της Α΄ Γυμνασίου. Για τους ρητούς από τις παρ. 2.1 έως 2.3 και 7.1 έως 7.8 της Α΄ Γυμνασίου. Για τους άρρητους και τους πραγματικούς από το 2ο κεφάλαιο της Β΄ Γυμνασίου.

Επίσης, από το διαδίκτυο:

- http://nrich.maths.org/5961 (ιστορία των αρνητικών αριθμών)
- http://nrich.maths.org/5958 (πρόβλημα με αθροίσματα θετικών και αρνητικών "βαρών")
- http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/SqRtOf2.shtml (διαγώνιος τετραγώνου μοναδιαίας πλευράς)

- http://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/sqrt2.10mil (τα πρώτα 10 εκατομμύρια ψηφία του $\sqrt{2}$).

Βασικά θέματα: Κανονικότητες – Συναρτήσεις

Κανονικότητες (Α΄ Γυμνασίου), Συναρτήσεις (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης μαθηματική έννοια και αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο με το οποίο μπορεί να μελετηθεί μια ποικιλία θεμάτων από τους αριθμούς (π.χ. πράξεις), την άλγεβρα (π.χ. εξισώσεις), τη μέτρηση (π.χ. εμβαδά) κ.λπ.. Συγχρόνως είναι και μια από τις πιο σύνθετες και δυσκολότερες μαθηματικές έννοιες για τους μαθητές. Η αναζήτηση κανονικοτήτων (και γενικότερα, αναλλοίωτων χαρακτηριστικών και σχέσεων) βρίσκεται στο κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας. Η ενασχόληση των μαθητών με αυτό το πεδίο μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης (διερεύνηση, εικασία, μοντελοποίηση) και να αποτελέσει ένα σημείο εισαγωγής στις συναρτήσεις και την άλγεβρα.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές στο Δημοτικό σχολείο έχουν ασχοληθεί με κανονικότητες (γεωμετρικά μοτίβα αλλά και ακολουθίες αριθμών) και έχουν φτάσει να διατυπώνουν το γενικό όρο μιας κανονικότητας (τουλάχιστον λεκτικά). Έχουν ασχοληθεί με φαινόμενα συμμεταβολής μεγεθών (από την καθημερινή ζωή και από τη γεωμετρία) και με προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Επιπλέον, έχουν χρησιμοποιήσει συστήματα συντεταγμένων. Στην Α΄ Γυμνασίου θα ασχοληθούν με την αλγεβρική και τη γραφική αναπαράσταση αριθμητικών κανονικοτήτων, στη Β΄ Γυμνασίου με την έννοια της συνάρτησης, τις αναπαραστάσεις της και ιδιαίτερα με τις $y=αx$, $y=αx+β$ και $y=α/x$, ενώ στη Γ΄ Γυμνασίου με την $y=αx^2$. Συγχρόνως, θα συνδέουν τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης με τις εξισώσεις, τα συστήματα και άλλα θέματα.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών με τις συναρτήσεις σχετίζονται κυρίως με:

- τη συνθετότητα της έννοιας, την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή (ανεξάρτητη και εξαρτημένη), συμμεταβολή, σύνολο, καθώς και την ποικιλία των αναπαραστάσεών της (λεκτική διατύπωση, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών)
- το επίπεδο αφαίρεσης που απαιτεί η μελέτη της συνάρτησης από τα διαφορετικά πλαίσια στα οποία μπορεί να εμφανίζεται (αριθμητική, μέτρηση κ.λπ.), καθώς και η ίδια η διαφορετικότητα αυτών των πλαισίων
- την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία (πχ βρίσκω την τιμή του y για κάποια τιμή του x) και σε ένα άλλο ως αντικείμενο που συνοδεύεται από μια ποικιλία αναπαραστάσεων (πχ. διαφορετικές συναρτήσεις–αντικείμενα μπορεί να συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά). Συνήθως οι μαθητές Γυμνασίου παραμένουν στην αντίληψη της συνάρτησης ως

μια υπολογιστική διαδικασία και δυσκολεύονται να περάσουν στο επίπεδο της συνάρτησης–αντικείμενο (πχ. να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο)

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η διερεύνηση των κανονικοτήτων μπορεί να περιλαμβάνει δραστηριότητες μοντελοποίησης ενός προβλήματος (πχ με έναν πίνακα), ανακάλυψης του κανόνα που παράγει για γνωστή ακολουθία αριθμών, αλγεβρικής διατύπωσής του (με χρήση μόνο μιας μεταβλητής) και γραφικής αναπαράστασης. Είναι σκόπιμη η διερεύνηση κανονικοτήτων με διαφορετικά χαρακτηριστικά: γραμμικές (πχ. 2ν, 3ν+2) αλλά και μη γραμμικές (πχ. $ν^2$, 1/ν, $2^ν$), κοκ. Τέτοιου είδους μαθηματικές δραστηριότητες μπορούν να βοηθήσουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και να αποτελέσουν έναν αποτελεσματικό τρόπο μετάβασης στην αλγεβρική παράσταση και στην έννοια της συνάρτησης.

Η μοντελοποίηση καταστάσεων, και η επίλυση προβλημάτων συνδέει τα μαθηματικά με τον κόσμο και τις άλλες επιστήμες και δίνει αξία και νόημα στην ενασχόληση των μαθητών με τις συναρτήσεις. Έτσι, θα πρέπει να αφιερώνεται χρόνος σε δραστηριότητες μετάφρασης πραγματικών ή ρεαλιστικών καταστάσεων και λεκτικών διατυπώσεων σε αλγεβρικές παραστάσεις και συναρτήσεις. Ομοίως, χρειάζεται να δίνεται χρόνος στους μαθητές για να χειριστούν τις συναρτήσεις στο λειτουργικό–διαδικαστικό επίπεδο (εύρεση της εξαρτημένης μεταβλητής για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως, κατασκευή πίνακα τιμών, ερμηνεία των τιμών που βρέθηκαν με βάση το πρόβλημα). Συγχρόνως, χρειάζεται να συζητούνται με ρητό τρόπο θεμελιώδη στοιχεία της έννοιας της συνάρτησης (πχ. ότι για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής υπάρχει μοναδική τιμή της εξαρτημένης), χωρίς αυτό να σημαίνει την αποστήθιση κανόνων και ορισμών. Επίσης, μέσα από συγκεκριμένες καταστάσεις μπορεί να φαίνεται ότι υπάρχουν χαρακτηριστικά που δεν απαιτούνται ώστε μια σχέση να είναι συνάρτηση (πχ. η ύπαρξη αλγεβρικού τύπου, η ανεξάρτητη μεταβλητή να παίρνει τιμές από ένα διάστημα πραγματικών, κ.λπ.)

Το πέρασμα στο επίπεδο της συνάρτησης–αντικείμενο μπορεί να υποστηριχθεί δίνοντας έμφαση στην ποικιλία των αναπαραστάσεων και τη μετάφραση από τη μία στην άλλη, καθώς και από τη διερεύνηση και σύγκριση στοιχείων όπως η κλίση ή ο ρυθμός μεταβολής, ο ρόλος των α και β στην y=αx+β, κοκ. Η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει αποτελεσματικά εργαλεία διερεύνησης, οπτικοποίησης και σύνδεσης των παραπάνω στοιχείων, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές δεν έχουν το ρόλο του θεατή, αλλά εμπλέκονται με τη χρήση των προσφερόμενων αναπαραστάσεων για την εκτέλεση μαθηματικών δράσεων, τη διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και την επίλυση προβλημάτων.

Οι συνδέσεις με άλλες περιοχές των σχολικών μαθηματικών (πχ. εξισώσεις, εμβαδά) αλλά και τις εξωσχολικές εμπειρίες των μαθητών μπορούν να συμβάλουν στην κατανόηση τόσο των συναρτήσεων, όσο και των περιοχών με τις οποίες συνδέονται. Ιδιαίτερη σημασία χρειάζεται να δοθεί στην αντιμετώπιση προβλημάτων με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, καθώς και στην αντιμετώπιση πιθανών παρανοήσεων (όπως πχ. ότι ανάλογα είναι δύο ποσά τα οποία όταν αυξάνει το ένα τότε αυξάνει και το άλλο, ή αυξάνονται και τα δύο με τον ίδιο αθροιστικό τρόπο).

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου: ΑΔ1

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η συμβολική διατύπωση του γενικού όρου της κανονικότητας και η γραφική αναπαράστασή της. Η διερεύνηση των μαθητών για τον αριθμό των σπίρτων που χρειάζονται για συγκεκριμένο και μικρό αριθμό τετραγώνων θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν στρατηγικές (όπως η κατασκευή ενός πίνακα τιμών) η γενίκευση των οποίων θα οδηγήσει στη συμβολική διατύπωση του γενικού όρου (που είναι απαραίτητος για να βρεθεί ο αριθμός σπίρτων που χρειάζεται για μεγάλους αριθμούς τετραγώνων). Είναι αναμενόμενες διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθητών, πχ. 1+3x, 4+3(x–1), 2x+x+1, κι αυτό μπορεί να είναι αφορμή συζήτησης για την ισοδυναμία αυτών των εκφράσεων. Η γραφική αναπαράσταση μπορεί να γίνει με σημεία, αναδεικνύοντας την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους. Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας κανονικότητας (εικονική, αριθμητική, γραφική, αλγεβρική) θεωρείται αναγκαία για την κατανόηση των εννοιών και τη διασύνδεσή τους.

Διεργασίες διερεύνησης, γενίκευσης και ελέγχου εικασιών

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας, συμβόλων και αναπαραστάσεων

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ1

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Το πρόβλημα και η εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους εικόνες από την καθημερινή και τη σχολική τους ζωή, αναμένεται να διαμορφώσουν ένα πρόσφορο πλαίσιο για τη διερεύνηση εννοιών όπως γραφική παράσταση, ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, διατεταγμένο ζεύγος και (χωρίς τη χρήση της ορολογίας) πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών.

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας, συμβόλων και αναπαραστάσεων

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ3

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εννοιολογική μετάβαση από τα ανάλογα ποσά και τη σχέση αναλογίας στη συνάρτηση ψ=αχ και ακολούθως για τη διερεύνηση του ρόλου του α ως η μεταβολή της τεταγμένης σε μοναδιαία αύξηση της τετμημένης. Χρησιμοποιείται το λογισμικό F-Probe, ένα δυναμικό εργαλείο αλγεβρικής έκφρασης που συνδέει πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική αναπαράσταση). Προτείνεται η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων να γίνει στο σχολικό εργαστήριο σε ομάδες των 3-4 ατόμων. Αν οι μαθητές δεν έχουν προηγούμενη επαφή με το συγκεκριμένο λογισμικό προτείνεται να αφιερώσει ο εκπαιδευτικός διδακτικό χρόνο για την εξοικείωση των μαθητών με τις απλές και βασικές λειτουργίες του λογισμικού. Υποστηρικτικά θα μπορούσε στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας να ενσωματωθεί βοήθεια χρήσης

Διεργασία επιλογής και χρήσης ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και επικοινωνία

Διεργασία ενδομαθηματικών συνδέσεων

του λογισμικού.

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ4

Η δραστηριότητα έχει ως στόχο τη διερεύνηση του σταθερού ρυθμού μεταβολής στις συναρτήσεις y=αx και y=αx+β και τη σύγκριση με άλλες συναρτήσεις. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για τη διερεύνηση της επίδρασης των α και β στη γραφική παράσταση της y=αx+β. Στο Geogebra οι μαθητές διερευνούν τη μεταβολή του y για μοναδιαία αύξηση του x, παρατηρούν ότι αυτή είναι σταθερή για τις ευθείες, αντίθετα από ότι συμβαίνει σε τετραγωνικές και άλλες συναρτήσεις. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης του ψηφιακού εργαλείου σχετίζονται με τη δυνατότητα αλλαγής των παραμέτρων και μετακίνησης σημείων με ταυτόχρονη παρατήρηση των επιδράσεων που έχουν αυτές οι αλλαγές. Είναι σημαντικό να δράσουν οι ίδιοι οι μαθητές στις προσφερόμενες αναπαραστάσεις (πχ. στο εργαστήριο πληροφορικής), να αναζητήσουν απαντήσεις στα ερωτήματα της δραστηριότητας και να τα συζητήσουν μέσα στις ομάδες τους και με όλη την τάξη. Ανάλογα με την εξέλιξη της συζήτησης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει και το ερώτημα αν μπορούν μετά από αυτή τη διερεύνηση να εξηγήσουν το γιατί η y=αx είναι ευθεία ενώ η y=αx^2 όχι.

Διεργασία διερεύνησης με χρήση ψηφιακών εργαλείων

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας, συμβόλων και αναπαραστάσεων

διεργασίες γενίκευσης και αιτιολόγησης

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ1

Χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geogebra, οι μαθητές διερευνούν τα χαρακτηριστικά της y=αx^2 (μορφή γραφικής παράστασης, συμμετρίες, μονοτονία και ακρότατα, ρυθμός μεταβολής) για διαφορετικές τιμές του α. Οι μαθητές μπορούν να χειρίζονται την αλλαγή της θέσης ενός σημείου στη γραφική παράσταση μέσω της δυναμικής μεταβολής της τετμημένης του. Οι μαθητές παρατηρούν τις αλλαγές, καταγράφουν και συζητούν τις ιδέες τους σχετικά με τη διασύνδεση των μεταβολών στον άξονα xx΄ με τις αντίστοιχες αλλαγές σε κρίσιμα χαρακτηριστικά της y=αx^2 (συμμετρίες, ακρότατα, μονοτονία, μη σταθερός ρυθμός μεταβολής). Στο στάδιο αυτό δεν επιδιώκεται η αυστηρή χρήση της μαθηματικής ορολογίας από τους μαθητές, αλλά είναι σημαντική η λεκτική απάντηση σε ερωτήματα όπως ‘τι αλλάζει και πώς’, ‘τι αλλάζει και γιατί’, ‘τι παραμένει σταθερό και γιατί’. Θα μπορούσε σε καθένα από τα ερωτήματα να δίνεται κάποιος χρόνος στους μαθητές να συζητήσουν μέσα στην ομάδα τους και κάποιος χρόνος για την ανακοίνωση των συμπερασμάτων των ομάδων και τη συζήτηση με όλη την τάξη. Μέσα από αυτές τις συζητήσεις, μπορεί να επιδιωχθεί και η σύνδεση με άλλες θεματικές ενότητες όπως οι μετασχηματισμοί (συμμετρία), η ευθεία (συγκρίσεις ως προς το ρυθμό μεταβολής, τη μονοτονία), ακόμα και οι εξισώσεις (πχ. αναζητώντας τα σημεία τομής με μια ευθεία).

Διεργασία διερεύνησης με χρήση ψηφιακών εργαλείων

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας, συμβόλων και αναπαραστάσε ων

Διεργασία συνδέσεων με άλλα μαθηματικά θέματα

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ2

Χρησιμοποιώντας το αρχείο Γ Γυμ-ΑΔ2-Τομές ψ=αχ+β και ψ=αχ2.ggb του λογισμικού Geogebra οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να μεταβάλλουν δυναμικά τους δρομείς των παραμέτρων α, β και γ των συναρτήσεων ψ=αχ+β και $ψ=γχ^2$, για να σχηματίσουν τις συναρτήσεις της δραστηριότητας και να βλέπουν εποπτικά τις γραφικές τους παραστάσεις και τα σημεία τομής τους. Ο εντοπισμός των σημείων τομής γραφικά (με το λογισμικό) και αλγεβρικά είναι κρίσιμη για την σύνδεση των αντίστοιχων διαδικασιών. Επειδή είναι σημαντικό για τους μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν με το χέρι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, θα μπορούσε το αρχείο να χρησιμοποιηθεί μόνο για τα β και γ ερωτήματα ώστε παράλληλα να εξοικονομηθεί διδακτικός χρόνος.

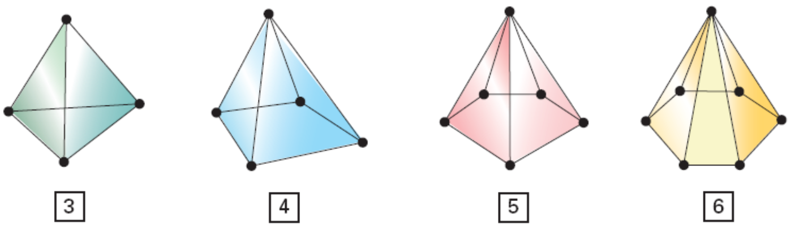
Διεργασία επιλογής και χρήσης ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και επικοινωνία

Διεργασία ενδομαθηματικών συνδέσεων

Διεργασία χρήσης αναπαραστάσεων

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

1. Τα παρακάτω σχήματα απεικονίζουν πυραμίδες με βάση τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο. Φανταστείτε ότι συνεχίζουμε να αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών της βάσης των πυραμίδων. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:



πλευρές πολυγώνου βάσης (ν)	3	4	5	6
αριθμός κορυφών (Κ)				
αριθμός ακμών (Α)				
αριθμός εδρών (Ε)				

Μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς Κ, Α και Ε για μια πυραμίδα που έχει ως βάση: α) 7-γωνο, β) 10–γωνο, γ) 27–γωνο;
Βρείτε τον αριθμό Κ+Ε–Α για καθεμιά από τις πυραμίδες. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό; (Α΄ τάξη)

Σχόλιο: Μέσα από το γεωμετρικό πλαίσιο του προβλήματος δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν κανονικότητες, να βρουν το γενικό όρο και να δικαιολογήσουν τα συμπεράσματά τους. Επιπλέον, δίνεται η αφορμή για δημιουργία απλών αλγεβρικών παραστάσεων και αναγωγές ομοίων όρων (στο τελευταίο ερώτημα).

2. 2, 5, 8, 11,… Βρείτε τον επόμενο όρο της κανονικότητας. Βρείτε τον τρόπο που προκύπτει κάθε όρος από τον προηγούμενό του. Μπορείτε με αυτόν τον τρόπο να βρείτε τον 10ο και τον 100ο όρο; (Α΄ τάξη)

Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η αναγνώριση από τους μαθητές της αξίας του γενικού όρου μιας κανονικότητας, ακόμα κι αν με αναδρομικούς τρόπους μπορούν να βρεθούν κάποιοι όροι.

3. Η κατανάλωση βενζίνης ενός συγκεκριμένου αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια ενός μεγάλου ταξιδιού είναι 8 λίτρα την ώρα. Γεμίζουμε το ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου με 50 λίτρα στην αρχή του ταξιδιού. Μπορείτε να εκφράσετε με μια σχέση την ποσότητα y της βενζίνης που υπάρχει στο ρεζερβουάρ μετά από x ώρες ταξιδιού; Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το x; Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Τι εκφράζουν τα σημεία που η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες; Χρησιμοποιήστε τον τύπο και τη γραφική παράσταση για να απαντήσετε στις ερωτήσεις: Πόση βενζίνη υπάρχει στο ρεζερβουάρ μετά από 5 ώρες και 30 λεπτά ταξιδιού; Μετά από πόσες ώρες υπάρχουν 22 λίτρα βενζίνη; (Β΄ τάξη)

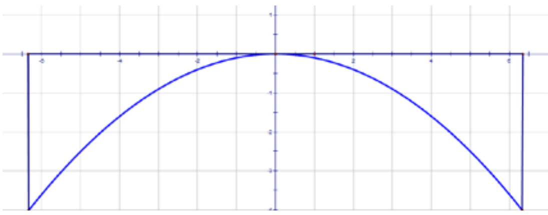
   Σχόλιο: Στόχοι της δραστηριότητας είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος με μια συνάρτηση και η χρήση τόσο του τύπου όσο και της γραφικής παράστασης για την απάντηση ερωτήσεων που σχετίζονται με το πρόβλημα.

4. Για τις συναρτήσεις: $y_1 = 5 + 2x$, $y_2 = x^2$ και $y_3 = 2^x$, κατασκευάστε πίνακες τιμών για τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 του x. Εξετάστε τον τρόπο που αυξάνεται το y_1 όταν το x αυξάνεται κατά μια μονάδα (από το 0 στο 1, από το 1 στο 2, από το 2 στο 3 κοκ). Κάνετε το ίδιο για το y_2 και το y_3. Τι παρατηρείτε;

   Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων. Με ποιον τρόπο οι προηγούμενες παρατηρήσεις σας (για τον ρυθμό αύξησης των y) φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις; (Β΄ τάξη)

   Σχόλιο: Μέσα από τη σύγκριση διαφορετικών συναρτήσεων οι μαθητές μπορούν να αντλήσουν συμπεράσματα για το ρυθμό μεταβολής (σταθερός για την ευθεία και μη σταθερός για την τετραγωνική και την εκθετική συνάρτηση) και να συνδέσουν αυτά τα συμπεράσματα με τη μορφή των γραφικών παραστάσεων (ευθεία ή καμπύλη).

5. Το σχήμα δείχνει την εικόνα μιας παραβολικής γέφυρας. Να κάνετε την προσομοίωση της σε ένα αλγεβρικό ψηφιακό σύστημα και να προσπαθήσετε να βρείτε την εξίσωση της παραβολής. (Γ΄ τάξη)

   Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η μετάφραση της γραφικής παράστασης σε τύπο συνάρτησης. Αυτή η μετάφραση δυσκολεύει τους μαθητές ιδιαίτερα στην περίπτωση που το σχήμα της γραφικής παράστασης δεν είναι προφανές (αν είναι παραβολή ή κάποια άλλη καμπύλη). Η συγκεκριμένη περίπτωση (με γνωστό το ότι πρόκειται για παραβολή) προτείνεται να αντιμετωπιστεί με χρήση ψηφιακών εργαλείων (πιθανόν με την κατασκευή μιας παραβολής της μορφής $y=\alpha x^2$ και μεταβολή του α ώστε να συμπίπτει με τη δοθείσα γραφική παράσταση). Εναλλακτικά, μπορεί να αντιμετωπιστεί και αλγεβρικά (υποθέτοντας ότι έχει τύπο της μορφής $y=\alpha x^2$ και διέρχεται από γνωστά σημεία).

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τις παραγράφους: 6.1 του σχολ. βιβλίου της Α΄

Γυμνασίου, 3.1 έως 3.5 του βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου, 4.1 του βιβλίου της Γ΄ Γυμνασίου. Επίσης, από το Υπ. Παιδείας της Κύπρου (http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika).

Από το διαδίκτυο:

- http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_328_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html (σειρά διαδραστικών δραστηριοτήτων με γεωμετρικές – αριθμητικές κανονικότητες, εύρεση τύπου, γράφημα)
- http://www.counton.org/explorer/patterns/squares-on-a-chessboard/, http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_191_g_3_t_2.html, http://nrich.maths.org/5815 (δραστηριότητες με κανονικότητες)
- http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/naFuncDef.pdf (έννοια συνάρτησης)
- http://www.e-yliko.gr/resource/resource.aspx?id=577, http://www.ies.co.jp/math/java/geo/lin_line/lin_line.html, http://www.shodor.org/interactivate/activities/SlopeSlider/, http://nrich.maths.org/6539 (διαδραστικές δραστηριότητες για το ρόλο των α και β στην y=αx+β)
- http://www.mathsnet.net/algebra/af3.html (συναρτησιακές μηχανές).

Βασικά θέματα: Αλγεβρικές Παραστάσεις

Αλγεβρική παράσταση (Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου), Ιδιότητες δυνάμεων (Β΄ Γυμνασίου), Ιδιότητες ριζών (Γ΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η ισχύς της άλγεβρας (στη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και στην αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων μέσω της μοντελοποίησης) συνδέεται άμεσα με την έννοια της μεταβλητής, την αλγεβρική παράσταση και τους μετασχηματισμούς της. Ωστόσο, αυτές οι έννοιες και διαδικασίες αποτελούν συγχρόνως πηγή δυσκολίας, απογοήτευσης και συχνά αποξένωσης των μαθητών από τα μαθηματικά.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές από το Δημοτικό σχολείο έχουν εμπειρίες που μπορούν να υποστηρίξουν την μετάβαση στην άλγεβρα: έχουν ασχοληθεί με τις ιδιότητες της αριθμητικής, με κανονικότητες και σχέσεις συμμεταβολής, με τύπους για υπολογισμό εμβαδού, με εξισώσεις κ.λπ. Έχουν συναντήσει το γράμμα ως άγνωστο και ως "ετικέτα" ενός μεγέθους (πχ. Ε=β·υ). Στα πλαίσια του Γυμνασίου θα διερευνήσουν έννοιες και διαδικασίες που σχετίζονται με την αλγεβρική παράσταση και τους μετασχηματισμούς της, χρησιμοποιώντας τις παράλληλα στις εξισώσεις, στις συναρτήσεις και στη Γεωμετρία–Μέτρηση και τη Φυσική. Στην Α΄ και τη Β΄ τάξη θα ασχοληθούν κυρίως με αλγεβρικές παραστάσεις πρώτου βαθμού, ενώ στη Γ΄ κυρίως με παραστάσεις μεγαλύτερου βαθμού. Επιπλέον, στις Β΄ και Γ΄ τάξεις θα ασχοληθούν με τις ιδιότητες των δυνάμεων και των ριζών ως αλγεβρικών αναπαραστάσεων που σχετίζονται με τη γραφή των αριθμών.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται κυρίως με:

- τη γλώσσα (φυσική και συμβολική) που χρησιμοποιείται στην άλγεβρα και τους διαφορετικούς ρόλους του γράμματος: ετικέτα μεγέθους, άγνωστος, γενικευμένος αριθμός, μεταβλητή, παράμετρος,
- την μετάφραση ανάμεσα σε λεκτικές διατυπώσεις, συμβολικές (αλγεβρικές) εκφράσεις, πίνακες τιμών, εικονικές – γεωμετρικές αναπαραστάσεις,
- την ταχύτητα με την οποία εισάγονται τα αλγεβρικά σύμβολα και ο χειρισμός τους, που δεν δίνει αρκετό χρόνο αφομοίωσης στους μαθητές και συχνά οδηγεί στην απομνημόνευση κανόνων χωρίς νόημα (οι οποίοι στη συνέχεια παραποιούνται και οδηγούν σε λάθη).

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η έμφαση στη μοντελοποίηση (πχ με αλγεβρική διατύπωση λεκτικών εκφράσεων), στη γενίκευση και τυποποίηση (πχ. μέσω κανονικοτήτων και συναρτήσεων) και στις αναπαραστάσεις (πχ. με εμβαδά ή με γραφικές παραστάσεις) είναι μια επιλογή του ΠΣ η οποία μπορεί να βοηθήσει στη βελτίωση της κατανόησης και των επιδόσεων των μαθητών στην άλγεβρα. Για τον ίδιο λόγο, η εμπλοκή των μαθητών με δραστηριότητες αλγεβρικού περιεχομένου καλύπτει όλο το χρονικό εύρος του Γυμνασίου, αλλά και μεγάλο εύρος των περιεχομένων (γενίκευση ιδιοτήτων αριθμητικής, κανονικότητες, εξισώσεις, συναρτήσεις).

Η εισαγωγή σε νέους τρόπους χρήσης του γράμματος είναι χρήσιμο να συνοδεύεται από δραστηριότητες που θα αναδεικνύουν τις διαφορετικές λειτουργίες του ενώ συγχρόνως θα αναδεικνύουν τη σημασία αυτών των χρήσεων στις εφαρμογές. Για παράδειγμα, για να αρχίσουν οι μαθητές να χρησιμοποιούν το γράμμα ως μεταβλητή, θα μπορούσε να τεθεί ένα απλό πρόβλημα (πχ. πώς μπορούμε να εκφράσουμε μαθηματικά τα χρήματα που έχει ο Γιάννης αν ξέρουμε ότι έχει 4 € στην τσέπη του και κάποια άλλα χρήματα στο πορτοφόλι του;) και μέσω αυτού να οδηγηθούν σε μια αλγεβρική παράσταση, να αντικαταστήσουν τη μεταβλητή με αριθμούς, και ενδεχομένως να κάνουν έναν πίνακα τιμών και να σχεδιάσουν μια γραφική παράσταση κ.λπ. Έτσι μπορεί να κατανοείται η μεταβλητή ως σύμβολο που αντιπροσωπεύει οποιονδήποτε αριθμό από ένα σύνολο αριθμών και η αλγεβρική παράσταση ως γενική παράσταση ενός πλήθους αριθμητικών παραστάσεων – αποτελεσμάτων. Αντίστοιχες δραστηριότητες μπορούν να υποστηρίζουν το ρόλο του γράμματος ως γενικευμένο αριθμό (οποιοσδήποτε αριθμός στις ταυτότητες), ως άγνωστο (κάποιος συγκεκριμένος αλλά όχι γνωστός αριθμός στις εξισώσεις), ως παράμετρο (πχ. που παράγει την οικογένεια των συναρτήσεων $y=\alpha x$).

Κάποιες σημαντικές πλευρές ή θεμελιώδεις ιδέες ίσως είναι ανάγκη να συζητούνται με ρητό τρόπο στην τάξη, με στόχο την καλύτερη κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές. Τέτοιες είναι: η χρήση της κατάλληλης ορολογίας, η δομή μιας αλγεβρικής παράστασης (άθροισμα ή γινόμενο αθροισμάτων κ.λπ.), ο ρόλος της επιμεριστικής ιδιότητας (στην αναγωγή ομοίων όρων, στις ταυτότητες και την παραγοντοποίηση).

Η ευχέρεια στον αλγεβρικό λογισμό αποτελεί ένα στόχο ο οποίος διαφοροποιείται και αναπτύσσεται από τάξη σε τάξη, αλλά σε κάθε περίπτωση μπορεί και πρέπει να επιδιώκεται σε συνδυασμό με την κατανόηση και την δημιουργία κατάλληλων αναπαραστάσεων. Έτσι, στην Α΄ και τη Β΄ Γυμνασίου, η απλοποίηση γραμμικών παραστάσεων μπορεί να στηριχτεί σε γεωμετρικές εικόνες ή στα "πλακίδια" (algebra tiles) που είναι συμβατές με τη "θεμελιώδη ιδέα" της επιμεριστικής ιδιότητας. Ομοίως, κάποιες από τις ταυτότητες στη Γ΄ τάξη μπορούν να αναδειχθούν από τη διερεύνηση γεωμετρικών ή/και αριθμητικών προβλημάτων και να παραχθούν αποδείξεις τους τόσο αλγεβρικές όσο και γεωμετρικές. Σε κάθε περίπτωση, η έμφαση δίνεται στην δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων που περιγράφουν καταστάσεις και προβλήματα (μοντελοποίηση), στην απόδοση μαθηματικού ή ρεαλιστικού νοήματος στις αλγεβρικές πράξεις (πχ. η αναγωγή: $x+(x+1)+(x+2)=3x+3$, μπορεί να εκφράζει την περίμετρο τριγώνου) και στην ανάδειξη της αξίας των αλγεβρικών χειρισμών (πχ. η παραγοντοποίηση είναι χρήσιμη στην απλοποίηση κλασμάτων και στην επίλυση εξισώσεων). Έτσι, οι πράξεις και παραγοντοποιήσεις πολύπλοκων παραστάσεων δεν μπορεί να αποτελούν στόχο της διδασκαλίας για όλους τους μαθητές.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου: ΑΔ2

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η δημιουργία αλγεβρικής παράστασης που εκφράζει μια κατάσταση (κόστος μετακίνησης με ταξί). Οι υπολογισμοί του κόστους για αρκετούς συγκεκριμένους αριθμούς χιλιομέτρων μπορούν να οδηγήσουν στην γενίκευση με χρήση μεταβλητής. Ο συνδυασμός αυτής της πορείας (συγκεκριμένοι αριθμοί – γενίκευση σε μεταβλητή και αλγεβρική παράσταση) με την αντίστροφη (αλγεβρική παράσταση – αντικατάσταση συγκεκριμένων τιμών στη μεταβλητή – υπολογισμός τιμής) βοηθά στην κατανόηση του ρόλου της μεταβλητής. Δραστηριότητες με παρόμοιους στόχους μπορούν να σχετίζονται και με διαφορετικά μαθηματικά περιεχόμενα (πχ για την εύρεση του γενικού όρου μιας ακολουθίας – κανονικότητας)

Διεργασία γενίκευσης

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας και συμβόλων

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ8

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η απλοποίηση γραμμικών αλγεβρικών παραστάσεων με εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας. Η χρήση των "πλακιδίων" είναι μια επιλογή με στόχο τη δημιουργία εικονικών αναπαραστάσεων που από τη μια μεριά θα υποστηρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα και από την άλλη θα βοηθούν στην ανάπτυξη, από τους μαθητές, "αυτοματισμών" στην αναγωγή ομοίων όρων. Μια άλλη (παρόμοια) επιλογή θα μπορούσε να είναι η χρήση εμβαδών ορθογωνίων. Στην αρχή της δραστηριότητας χρειάζεται να δοθεί χρόνος για την εξοικείωση των μαθητών με το πλαίσιο των πλακιδίων. Οι διερευνήσεις των μαθητών έχουν ως στόχο την ανάπτυξη από τους ίδιους

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας, συμβόλων και αναπαρα–στάσεων

υλικό σχετικά με τα "πλακίδια": http://en.wikipedia.org/wiki/Alg στρατηγικών σε απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς και τη σύγκριση διαφορετικών στρατηγικών και μεθόδων.

ebra_tile

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ3

Η δραστηριότητα αυτή σχετίζεται με τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών, ειδικότερα την $\sqrt{a\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$. Επιπλέον, ίσως αναπτυχθεί και μια συζήτηση για τους άρρητους αριθμούς με αφορμή τη γνώμη του Γιάννη που υπονοεί ότι το γινόμενο δύο αριθμών με άπειρα δεκαδικά ψηφία (όπως οι $\sqrt{3}$ και $\sqrt{75}$) δεν θα είναι ακέραιος. Μια πιθανή πορεία της διερεύνησης των μαθητών περιλαμβάνει: αναζήτηση από τους μαθητές ερμηνειών για τις απόψεις που περιγράφονται στο σενάριο, εικασία για την ιδιότητα που ίσως ισχύει και διερεύνηση με παραδείγματα, ανάδειξη της ανάγκης μιας γενικής απόδειξης της ιδιότητας και δημιουργία της απόδειξης. Προτείνεται ο εκπαιδευτικός να επιλέξει το ρόλο του συντονιστή της συζήτησης, αφήνοντας χρόνο στους μαθητές να αναπτύξουν πρωτοβουλίες. Επεκτάσεις αυτής της πορείας θα μπορούσε να είναι η διερεύνηση του αν ισχύουν αντίστοιχες ιδιότητες για το άθροισμα, τη διαφορά και το πηλίκο αριθμών. Αυτή η διερεύνηση δίνει τη δυνατότητα να συζητηθούν η έννοια και ο ρόλος της αλγεβρικής απόδειξης και του αντιπαραδείγματος. Με αφορμή αυτό το πρόβλημα μπορούν να αναδειχθούν τα μειονεκτήματα της χρήσης υπολογιστή τσέπης και η αξία των ιδιοτήτων των ριζών (αφού, ο πολλαπλασιασμός $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ με το κομπιουτεράκι δεν θα δώσει το σωστό αποτέλεσμα 15).

Διεργασίες διερεύνησης, εικασίας και ελέγχου, επιχειρηματολογίας και απόδειξης

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας και συμβόλων

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ4

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η ταυτότητα του τετραγώνου αθροίσματος σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο. Η πρώτη ερώτηση, με αναμενόμενη την απάντηση $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$ έχει στόχο τη δημιουργία σύγκρουσης ανάμεσα σε αυτό που ίσως φαίνεται λογικό στους μαθητές και στα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη δοκιμή συγκεκριμένων αριθμών (για να γίνει αυτό, το σχήμα δεν πρέπει να δίνεται στο α ερώτημα). Η ώθηση των μαθητών σε τέτοιου είδους συγκρούσεις είναι συχνά χρήσιμη για το πέρασμα από τις διαισθητικές αντιλήψεις σε πιο συστηματικές διερευνήσεις και επιχειρηματολογίες. Η αναγνώριση της εικασίας ως εσφαλμένης, ακολουθείται με ένα πλαίσιο (γεωμετρικό) για τη βελτίωσή της και συγχρόνως την παροχή μιας απόδειξης, έστω κι αν αυτή περιορίζεται σε θετικές τιμές των μεταβλητών. Η διερεύνηση του τρίτου ερωτήματος (με δεδομένη την απάντηση του α ερωτήματος όπως περιγράφεται παραπάνω) μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση του λάθους αλλά και σε μια διερεύνηση των συνθηκών κάτω από τις οποίες αυτό γίνεται σωστό. Επέκταση της

Διεργασίες διερεύνησης, εικασίας, ελέγχου και απόδειξης

Διεργασία συνδέσεων (με τα εμβαδά)

δραστηριότητας θα μπορούσε να είναι η ανάδειξη των περιορισμών της γεωμετρικής απόδειξης και η αναζήτηση κάποιου τρόπου να αποφανθούμε για την ισχύ της σχέσης για κάθε αριθμό (θετικό ή αρνητικό). Αυτή η γενίκευση οδηγεί στην έννοια της ταυτότητας και στην αλγεβρική απόδειξή της.

Διεργασία γενίκευσης (μέσω της αλγεβρικής απόδειξης)

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ6

Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα επιδιώκεται η διερεύνηση της έννοιας του ΕΚΠ μονώνυμων και απλών πολυωνύμων και ανάπτυξη στρατηγικών υπολογισμού του. Η ανάδειξη των αναλογιών με την ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και το ΕΚΠ φυσικών έχει στόχο την απόδοση νοήματος στους αλγόριθμους της παραγοντοποίησης και του ΕΚΠ πολυωνύμων. Οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν στη διατύπωση του κανόνα εύρεσης του ΕΚΠ μέσα από προσπάθειες και βελτιώσεις. Επιπλέον, η ερώτηση "γιατί το γινόμενο όλων των παραγόντων στη μεγαλύτερή τους δύναμη μας δίνει το ΕΚΠ;", είναι χρήσιμη για την ανάπτυξη αιτιολογήσεων και μπορεί να συζητηθεί πρώτα για τους φυσικούς και να επεκταθεί στα μονώνυμα και στα πολυώνυμα.

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας και συμβόλων

Διεργασία αιτιολόγησης

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

1. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το γινόμενο $3^4 \cdot 3^5$ είναι ίσο με τη δύναμη 3^9; Μπορείτε να γράψετε με μορφή μιας δύναμης το γινόμενο $2^3 \cdot 2^5$;

   Μπορείτε να γράψετε με μορφή μιας δύναμης το γινόμενο $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda$;

   Πως θα γράφατε το 5^8 ως γινόμενο δυνάμεων; (Β΄ Γυμνασίου)

   Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η διερεύνηση και η αιτιολόγηση (από τους μαθητές) της ιδιότητας $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$. Αντίστοιχες δραστηριότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις υπόλοιπες ιδιότητες.

2. Ο καθηγητής των μαθηματικών έχει ζητήσει από την τάξη να βρει τον κανόνα (τύπο) με τον οποίο προκύπτουν οι όροι της σειράς Α από τους αριθμούς της πρώτης σειράς στον παρακάτω πίνακα:

τάξη του όρου	1	2	3	4	5	…	ν	…
όρος Α	2	4	6			…		…

   Ομοίως για τους όρους της σειράς Β στον παρακάτω πίνακα:

τάξη του όρου	1	2	3	4	5	…	ν	…
όρος Β	5	7	9			…		…

   Ο Γιάννης, αφού βρήκε τους κανόνες, πρότεινε να συνεχίσουν το πρόβλημα με την ερώτηση αν μπορούν να βρουν τον κανόνα για την κατασκευή των αριθμών που προκύπτουν από την πρόσθεση των Α και Β. Είχε την ιδέα να φτιάξει έναν πίνακα με τέσσερις γραμμές:

τάξη του όρου	1	2	3	4	5	…	ν	…
όρος Α						…		…
όρος Β						…		…
Α+Β						…		…

Μπορείτε να υλοποιήσετε την ιδέα του Γιάννη;

Η Μαρία δήλωσε ότι βρήκε τον κανόνα για το Α+Β πολύ πιο γρήγορα απ' το Γιάννη. Μπορείτε να φανταστείτε πώς; Μπορείτε να βρείτε με τον ίδιο τρόπο τον κανόνα για το Α–Β; (Β΄ Γυμνασίου)

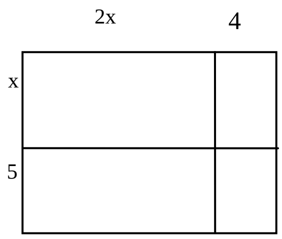
Σχόλιο: Η δραστηριότητα αυτή έχει ως στόχο την κατανόηση της αναγωγής ομοίων όρων σε άμεση σχέση με το πλαίσιο του προβλήματος. Δηλαδή την κατανόηση του ότι ο τύπος 4ν+3 παράγει τους ίδιους αριθμούς που παράγει το άθροισμα των 2ν και 2ν+3.

3. Υπολογίστε το γινόμενο (2x+4)(x+5),

   α) χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα,

   β) χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

   Πώς σχετίζονται μεταξύ τους τα βήματα των δύο διαδικασιών; (Γ΄ Γυμνασίου)



   Σχόλιο: Το γεωμετρικό πλαίσιο μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση της χρήσης της επιμεριστικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η δημιουργία συνδέσεων μεταξύ της επιμεριστικής ιδιότητας και εικονικών αναπαραστάσεων.

4. Να κάνετε τις πράξεις:

   α) $\frac{1}{9}-\frac{1}{15}$ και $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^2+x}$ β) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}$ και $\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x^2}$

   Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η αναγνώριση από τους μαθητές των ομοιοτήτων μεταξύ των πράξεων μεταξύ ρητών αριθμών και κλασματικών αλγεβρικών παραστάσεων.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τις παραγράφους: 4.1, 7.8, 7.9, 7.10 του σχολ. βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου, 1.1 του βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου, 1.1Γ, 1.2 έως 1.6, 1.8 έως 1.10 του βιβλίου της Γ΄ Γυμνασίου. Επίσης, από το Υπ. Παιδείας της Κύπρου (http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika).

Από το διαδίκτυο:

- http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html (πολλαπλασιασμός διωνύμων με πλακίδια)
- http://nrich.maths.org/2289 (πρόβλημα του είδους "σκέψου έναν αριθμό")

- http://nrich.maths.org/2791 (πρόβλημα με αριθμούς που απαιτεί δημιουργία παραστάσεων και αναγωγές ομοίων όρων)
- http://nrich.maths.org/2821, http://nrich.maths.org/2278,
- http://nrich.maths.org/584 (προβλήματα με αριθμούς που απαιτούν δημιουργία παραστάσεων και πολλαπλασιασμό ή ταυτότητες)
- http://www.e-yliko.gr/resource/resource.aspx?id=309z, ή http://www.e-yliko.gr/resource/resource.aspx?id=65 (ταυτότητες με εμβαδά).

Βασικά θέματα: Ισότητα–Ανισότητα

Εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού (Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου), πολυωνυμικές εξισώσεις (Γ΄ Γυμνασίου), γραμμικά συστήματα (Γ΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η εξίσωση, η ανίσωση και τα συστήματα αποτελούν ισχυρά εργαλεία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων που μπορεί να προέρχονται από άλλα πεδία των μαθηματικών, από άλλες επιστήμες, αλλά και από την καθημερινή ζωή. Οι έννοιες και οι διαδικασίες που σχετίζονται με την εξίσωση, την ανίσωση και τα συστήματα συνδέονται στενά με τη χρήση του γράμματος, την αλγεβρική παράσταση, τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους, την έννοια και τις ιδιότητες της ισότητας και της ανισότητας. Για αυτούς τους λόγους έχουν σημαντική θέση σε κάθε πρόγραμμα σπουδών. Επιπλέον, στο ΠΣ υιοθετείται η έμφαση στην κατανόηση των εννοιών και η βαθμιαία ανάπτυξη των συλλογισμών και των διαδικασιών (πχ. οι εξισώσεις α΄ βαθμού μελετώνται σε διαφορετικά επίπεδα στις τάξεις ΣΤ΄ Δημοτικού και Α΄ και Β΄ Γυμνασίου), αφού ο μονόπλευρος προσανατολισμός στους αλγόριθμους επίλυσης έχει φτωχά μαθησιακά αποτελέσματα.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές έχουν συναντήσει εξισώσεις χωρίς γράμματα που η επίλυσή τους απαιτεί μια πράξη (πχ. 3+_=5, _:5=7, κοκ), ενώ στην ΣΤ΄ τάξη έχουν συναντήσει τις ίδιες μορφές εξισώσεων αλλά με χρήση του γράμματος. Στην Α΄ Γυμνασίου θα ασχοληθούν με εξισώσεις που έχουν άγνωστο μόνο στο ένα μέλος (που δεν απαιτούν αλγεβρικούς χειρισμούς με τον άγνωστο και στα δύο μέλη), στην Β΄ με εξισώσεις της μορφής αx+β=γx+δ (και που μπορεί να περιέχουν και ρητούς συντελεστές και παρενθέσεις), για να φτάσουν στην Γ΄ τάξη να διαπραγματευθούν ανισώσεις α΄ βαθμού, πολυωνυμικές εξισώσεις (που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες μετά από παραγοντοποίηση) και γραμμικά συστήματα (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους). Αργότερα θα ασχοληθούν και με άλλες μορφές εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων (πχ. εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις, μη γραμμικά συστήματα κ.λπ.) που απαιτούν κατανόηση των εννοιών και ευχέρεια στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού.

Δυσκολίες των μαθητών: Κάποιες από τις πρώτες δυσκολίες των μαθητών, οι οποίες συχνά παραμένουν και στο Γυμνάσιο, σχετίζονται με την κατανόηση του "="

περισσότερο ως προτροπή να κάνουν μια πράξη, να δώσουν ένα αποτέλεσμα, παρά ως σύμβολο ισότητας (ισοδυναμίας των δύο μελών). Επιπλέον, δεν γίνεται πάντα κατανοητή η έννοια του αγνώστου (πχ. για κάποιους μαθητές, οι εξισώσεις 3α+14=58 και 3β+14=58 έχουν διαφορετικές λύσεις και για κάποιους δεν είναι καν εξισώσεις, αφού δεν περιέχουν τον άγνωστο x). Νέες δυσκολίες αναμένονται σχετικά με τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις διαδικασίες επίλυσης μιας εξίσωσης και την δικαιολόγησή τους, αφού συχνά απομνημονεύονται τεχνικές χωρίς κατανόηση (πχ. "αλλάζω μέλος αλλάζοντας πρόσημο") που οδηγούν σε σύγχυση και παρανοήσεις. Το ίδιο φαίνεται να ισχύει για τα συστήματα, με επιπλέον δυσκολία τη γραφική αναπαράσταση και επίλυσή τους. Η "βολική" επέκταση των διαδικασιών επίλυσης εξισώσεων και στις ανισώσεις, δημιουργεί δυσκολίες που σχετίζονται με τις ιδιότητες των ανισοτήτων και με το πλήθος λύσεων των ανισώσεων. Σχετικά με τις πολυωνυμικές εξισώσεις και με δεδομένο ότι η επίλυσή τους στηρίζεται στην παραγοντοποίηση, οι δυσκολίες σχετίζονται με το συλλογισμό "αν α·β=0, τότε α=0 ή β=0" και με το πλήθος των λύσεων (πχ. η ύπαρξη δύο λύσεων μπορεί να γίνεται κατανοητή ως ένα είδος "αοριστίας"). Η επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις αποτελεί μία από τις δυσκολότερες δραστηριότητες της άλγεβρας για τους μαθητές του Γυμνασίου και αυτό σχετίζεται με τις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να μοντελοποιήσουν μια κατάσταση και να εκφράσουν αλγεβρικά ένα πρόβλημα.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Στόχος είναι η εξοικείωση των μαθητών με την αλγεβρική επίλυση μιας εξίσωσης με χρήση των ιδιοτήτων της ισότητας (με την ίδια πράξη και στα δύο μέλη). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο με προσεκτικό σχεδιασμό που υπερβαίνει τα χρονικά όρια μιας τάξης. Στην Α΄ Γυμνασίου, πριν από την εστίαση στις ιδιότητες της ισότητας (πχ. με το μοντέλο της ζυγαριάς) είναι χρήσιμες οι μέθοδοι δοκιμής–λάθους–βελτίωσης (η οποία βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής–αγνώστου, της εξίσωσης και της επίλυσής της) και των αντίστροφων πράξεων (που προετοιμάζει για περισσότερο αναπτυγμένες αλγεβρικές μεθόδους). Η χρήση εξισώσεων για την μοντελοποίηση και επίλυση απλών προβλημάτων ή προβλημάτων που έχουν αντιμετωπιστεί με απλούστερες μεθόδους (ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, προβλήματα τόκου, εκπτώσεων και αυξήσεων, κ.λπ.) εισάγει τους μαθητές στη γενίκευση και την αφαίρεση αναδεικνύοντας τη δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων.

Στη Β΄ Γυμνασίου, η αλγεβρική επίλυση με γενίκευση της χρήσης των ιδιοτήτων της ισότητας (που είναι ο στόχος γι' αυτή την τάξη) δίνει νόημα και δικαιολόγηση στις αλγοριθμικές διαδικασίες. Για το λόγο αυτό, για ένα διάστημα πρέπει να δίνεται έμφαση στις ιδιότητες που χρησιμοποιούνται (π.χ. προσθέτουμε και στα δύο μέλη των ίδιο αριθμό) και όχι απλά στη διαδικασία (π.χ. χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους αλλάζοντας τα πρόσημα όταν μεταφέρουμε από το ένα μέλος στο άλλο). Η χρήση μοντέλων όπως η ζυγαριά μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης, αλλά και των αλγεβρικών χειρισμών που απαιτούνται για την επίλυσή της. Η γραφική επίλυση εξισώσεων (μέσω των συναρτήσεων) μπορεί να βοηθήσει στην διαμόρφωση αναπαραστάσεων για τις έννοιες της εξίσωσης και της λύσης της.

Στη Γ΄ Γυμνασίου η διαπραγμάτευση των ανισώσεων μπορεί να γίνει με αντίστοιχο τρόπο, αλλά εστιάζοντας στις διαφορές με την εξίσωση (κυρίως στο σύνολο λύσεων και την αναπαράστασή του στην ευθεία των πραγματικών). Επιπλέον, μπορούν να συζητηθούν οι ιδιότητες της διάταξης και των πράξεων (πρόσθεση ανισοτήτων κατά μέλη κ.λπ.) και η εφαρμογή τους σε απλά προβλήματα. Για τις πολυωνυμικές εξισώσεις, χρειάζεται να συζητηθούν στην τάξη τόσο ο σκοπός της παραγοντοποίησης, όσο και η ύπαρξη περισσότερων της μιας λύσης. Όσον αφορά στα γραμμικά συστήματα, η έννοια της γραμμικής εξίσωσης, η αναπαράστασή της ως ευθεία και η γραφική αναπαράσταση και επίλυση του συστήματος, βοηθούν τους μαθητές στην απόδοση νοήματος στο σύστημα, τη λύση του και τη διαδικασία επίλυσής του. Οι αλγεβρικές μέθοδοι επίλυσης υπερέχουν των γραφικών στην ακρίβεια και τη γενικότητα, αλλά δεν πρέπει να παραβλέπεται η διδακτική αξία της γραφικής αναπαράστασης ενός συστήματος και της λύσης του. Επιπλέον, είναι σημαντική η ανάδειξη και η κατανόηση των ιδιοτήτων που υποστηρίζουν τις αλγεβρικές μεθόδους (πχ η αντικατάσταση στηρίζεται στο γεγονός ότι η τιμή του αγνώστου είναι η ίδια και στις δύο εξισώσεις), σε αντιδιαστολή με την απομνημόνευση από τους μαθητές κανόνων χωρίς νόημα.

Η επίλυση προβλήματος (για όλες τις τάξεις) είναι το πεδίο όπου αναδεικνύεται η αξία της εξίσωσης και του συστήματος. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να αφιερωθεί χρόνος στη μοντελοποίηση καταστάσεων και προβλημάτων με αλγεβρικές παραστάσεις και εξισώσεις.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου: ΑΔ3

Μέσα από το μοντέλο της ζυγαριάς οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν τόσο τις ιδιότητες της ισότητας (ότι η ισότητα – ισορροπία δεν αλλάζει αν κάνουμε τη ίδια πράξη – δράση και στα δύο μέλη), όσο και τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης. Είναι σημαντικό η εξερεύνηση αυτή να γίνει από τους ίδιους τους μαθητές μέσα από το νοητικό πείραμα με τη ζυγαριά (χωρίς χαρτί και μολύβι) και κατόπιν να διατυπωθεί συμβολικά από τους ίδιους. Είναι πιθανό κάποιοι μαθητές να λύσουν το πρόβλημα με δοκιμές, εφόσον αυτή η μέθοδος είναι πιο προσιτή στον άπειρο λύτη και πιο κοντά στην καθημερινή εμπειρία. Με κατάλληλη μετατροπή των δεδομένων (πχ. ένα κυβάκι λιγότερο στον ένα από τους δίσκους) μπορεί να φανεί ότι αυτή η μέθοδος δεν είναι πάντα εύχρηστη[6].

Διεργασία διερεύνησης και γενίκευσης ιδιοτήτων

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση συμβόλων

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ9

Η δραστηριότητα αυτή έχει τους ίδιους στόχους και χαρακτηριστικά με την ΑΔ3 της Α΄ τάξης, αλλά παρέχει δύο πλαίσια για τη διερεύνηση των μαθητών και αντιστοιχεί σε εξισώσεις με άγνωστο και στα δύο μέλη (ο χειρισμός άγνωστων ποσοτήτων έχει μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές). Το μοντέλο των πλακιδίων έχει το πλεονέκτημα ότι εισάγονται και αρνητικοί αριθμοί (ενώ τα

Διεργασία διερεύνησης και γενίκευσης

[6] Όταν η εξίσωση είναι διατυπωμένη, η μέθοδος δοκιμή – λάθος – βελτίωση είναι πολύ χρήσιμη διδακτικά, όπως αναφέρεται και στις "προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση".

βάρη στη ζυγαριά είναι μόνο θετικά) και το μειονέκτημα ότι το πλαίσιο είναι περισσότερο αφηρημένο και απαιτεί εξοικείωση με το μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών (που ίσως έχουν συναντήσει οι μαθητές στις πράξεις ακεραίων). Σε κάθε περίπτωση, ο στόχος είναι η κατανόηση των ιδιοτήτων της ισότητας και η επίλυση της εξίσωσης με τις ίδιες πράξεις και στα δύο μέλη και όχι η χρήση κανόνων χωρίς να τους αποδίδεται νόημα. Στην εξίσωση με τη ζυγαριά, μπορεί να θεωρηθεί ότι κάθε κυβάκι έχει βάρος 50 gr (όπως στην αντίστοιχη δραστηριότητα της Α΄ τάξης) ή μπορεί να επιλεγεί άλλο βάρος.

ιδιοτήτων

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ10

Η σύνδεση των εξισώσεων με τις συναρτήσεις είναι σημαντική γιατί προσδίδει μια εναλλακτική εικόνα στην εξίσωση (η οποία αντιστοιχεί στην πιο γενική μορφή της έννοιας της εξίσωσης ως ισότητα των τιμών δύο συναρτήσεων). Η σύγκριση από τους ίδιους τους μαθητές των μεθόδων επίλυσης (γραφική, αριθμητική και αλγεβρική) μπορεί να αναδείξει κριτήρια απλότητας (αριθμητική), κατανόησης μέσω της απεικόνισης (γραφική) και γενικότητας (αλγεβρική).

Διεργασία ενδομαθηματικών συνδέσεων με συναρτήσεις

Διεργασία αναστοχασμού και μεταγνωστικής ενημερότητας για τις μεθόδους

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ7

Πρόκειται για ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που κάποιος εξοικειωμένος λύτης μάλλον θα το λύσει χρησιμοποιώντας ανίσωση πρώτου βαθμού. Ωστόσο, μπορεί να επιλεγούν από τους μαθητές άλλοι ισοδύναμοι τρόποι λύσης (αριθμητικά με πίνακες τιμών ή γραφικά με χρήση δύο συναρτήσεων). Ακόμη και μια λύση με δοκιμές θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να οδηγηθούν οι μαθητές σε περισσότερο συστηματικές μεθόδους διερεύνησης, όπως έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση. Ο στόχος σε κάθε περίπτωση είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος και η ανάδειξη των πλεονεκτημάτων κάθε μεθόδου επίλυσης.

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας και συμβολισμών

Διεργασία χρήσης αναπαραστάσεων

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ8

Είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα που οδηγεί στη διατύπωση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης και την επίλυσή της με παραγοντοποίηση. Μια διερεύνηση των μαθητών με δοκιμές είναι πιθανόν να οδηγήσει σε κάποιες λύσεις (πχ. στο 0 και το 1) αλλά όχι σε όλες. Αυτή η δυσκολία μπορεί να λειτουργήσει ως αφορμή ώστε να αναδειχτεί η σημασία της επίλυσης μιας εξίσωσης μέσω αλγεβρικού μετασχηματισμού για την εύρεση όλων των λύσεών της.

διεργασίες διερεύνησης και αιτιολόγησης

Διεργασία αναστοχασμού για τις μεθόδους

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ10

Η δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εισαγωγή στην έννοια της γραμμικής εξίσωσης, στην έννοια του γραμμικού συστήματος και της λύσης του, όπως και στην γραφική επίλυσή του. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geogebra μπορούν να αντιληφθούν άμεσα πως η μεταβολή των συντελεστών επηρεάζει τη θέση των ευθειών και των σημείων τομής τους. Το "παιχνίδι" των μαθητών με τους δρομείς είναι σημαντικό στοιχείο της διερεύνησής τους και μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία σταθερών νοερών εικόνων για το σύστημα και τη λύση του. Επιπλέον, αυτή η δραστηριότητα μπορεί να αναδείξει την αναγκαιότητα αλγεβρικής μεθόδου επίλυσης (πχ για κάποιο απομακρυσμένο σημείο τομής ή επειδή η χρήση του ψηφιακού εργαλείου για τη γραφική επίλυση συστήματος είναι αρκετά χρονοβόρα).

Διεργασία επιλογής και χρήσης ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και επικοινωνία
Διεργασία μετάφρασης μεταξύ γραφικών αναπαραστάσεων και αλγεβρικού συμβολισμού

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

1. Να κατασκευάσετε πρόβλημα που λύνεται με την εξίσωση 15=2x-7. (Α΄ Γυμνασίου)

   Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η κατασκευή προβλήματος που μοντελοποιείται από γνωστή εξίσωση. Αυτή η διαδικασία είναι σημαντική στην εξοικείωση των μαθητών με την μοντελοποίηση καταστάσεων και προβλημάτων μέσω εξισώσεων, αλλά και αλγεβρικών παραστάσεων και συναρτήσεων.

2. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση με άγνωστο και στα δύο μέλη, η οποία να έχει ως λύση τον αριθμό –4. (Β΄ Γυμνασίου)

   Σχόλιο: Η κατασκευή εξίσωσης με γνωστή λύση υποστηρίζει την κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης και της λύσης της.

3. Η Μαρία πήγε στο βιβλιοπωλείο με σκοπό να αγοράσει 15 τετράδια. Επειδή όμως της έκαναν έκπτωση 10 λεπτά σε κάθε τετράδιο, αγόρασε με τα ίδια χρήματα 18 τετράδια. Πόσο πλήρωσε για κάθε τετράδιο; (Β΄ Γυμνασίου)

   Σχόλιο: Η δραστηριότητα έχει ως στόχο την μοντελοποίηση ενός προβλήματος με εξίσωση. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με πρακτική αριθμητική, αλλά η χρήση εξίσωσης μπορεί να αναδείξει την αποτελεσματικότητα των αλγεβρικών μεθόδων.

4. Σχεδιάστε με λογισμικό (πχ. Geogebra) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^3+2x^2$ και $y=x^2+2x$. Σημειώστε στη γραφική παράσταση το ή τα κοινά σημεία τους. Αν υποθέσουμε ότι ένα κοινό σημείο είναι το Α, να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του σε σχέση με τους τύπους των δύο συναρτήσεων. Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του κοινού ή των κοινών τους σημείων (α) από τις γραφικές παραστάσεις και (β) αλγεβρικά με χρήση των τύπων των δύο συναρτήσεων.

   Σχόλιο: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι α) η σύνδεση των πολυωνυμικών εξισώσεων και των αλγεβρικών μεθόδων επίλυσής τους με την γραφική αναπαράστασή τους και β) η αναγνώριση της λύσης της εξίσωσης ως τετμημένης του κοινού σημείου (ή των κοινών σημείων). Υποστηρικτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αρχείο Γ Γυμ-ΕΔ2-Τομές συναρτήσεων.ggb όπου οι μαθητές μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά τους δρομείς των παραμέτρων α, β, γ και δ για τις συναρτήσεις $ψ=αχ^3+βχ^2$ και $ψ=γχ^2+δχ$ και να δουν εποπτικά τη μεταβολή των γραφικών παραστάσεων και τα σημεία τομής τους σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. (Γ΄ Γυμνασίου)

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν μέρη ή και ολόκληρες παράγραφοι από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία της Β΄ Γυμνασίου (παρ. 1.1, 1.2, 1.4, 1.5) και της Γ΄ Γυμνασίου (παρ. 2.2Α, 3.1, 3.2, 3.3) (εκδόσεις 2010). Επίσης, από το Υπ. Παιδείας της Κύπρου (http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika).

Επίσης, από το διαδίκτυο:

- http://www.mathsnet.net/algebra/cu8.html , http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html (εφαρμογίδια επίλυσης εξίσωσης α΄βαθμού)
- http://nrich.maths.org/996 πρόβλημα εξίσωσης α΄ βαθμού)
- http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/WProblem2Eq.shtml http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/naBalVar1.pdf http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/ekSubElim.pdf (δραστηριότητες σχετικές με γραμμικά συστήματα)
- http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/nsSolveaProduct.pdf http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/nsFactoringHelps.pdf (δραστηριότητες για επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης με παραγοντοποίηση)
- http://nrich.maths.org/7344 (εισαγωγική δραστηριότητα στην ανίσωση α΄ βαθμού με αριθμητική επίλυση – πίνακες τιμών)
- http://nrich.maths.org/7342 (προβλήματα ανίσωσης α΄ βαθμού).

Γεωμετρία και Μετρήσεις

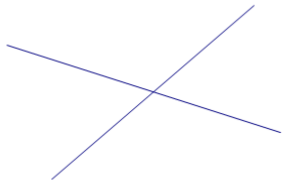
Βασικά θέματα: Γεωμετρικά σχήματα: Αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων (Α΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται οι βασικές γεωμετρικές έννοιες, δηλαδή τα βασικά στοιχεία που αποτελούν τα γεωμετρικά σχήματα και οι μεταξύ τους σχέσεις και ιδιότητες. Η ανάπτυξη της ενότητας δεν γίνεται απαραίτητα ανεξάρτητα από κάποιες άλλες ενότητες. Έτσι στοιχεία σχετικά με την μέτρηση ή τις κατασκευές παρεμβάλλονται όταν είναι σκόπιμο.

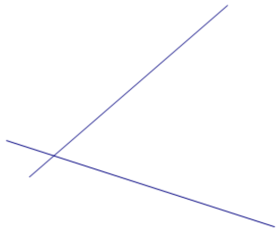
Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Στο Δημοτικό οι μαθητές έχουν γνωρίσει πτυχές για τις περισσότερες βασικές γεωμετρικές έννοιες καθώς και σχέσεις γι' αυτές. Έχουν γνωρίσει έννοιες όπως η ευθεία , το ευθύγραμμο τμήμα, η γωνία, ο κύκλος, σχέσεις όπως η παραλληλία, η καθετότητα, η ισότητα κ.λπ. και έχουν προβεί στη διάκριση των γωνιών σε ορθές, αμβλείες και οξείες. Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα εμπλακούν με τις παρακάτω έννοιες:

- Επιφάνειες και γραμμές. Είδη επιφανειών και γραμμών.
- Ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, επίπεδο, ημιεπίπεδο, πολυγωνικές γραμμές. Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων
- Γωνία και σύγκριση γωνιών
- Ευθύγραμμα σχήματα και ισότητα αυτών
- Είδη γωνιών. Διχοτόμος γωνίας
- Παράλληλες και κάθετες ευθείες
- Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος
- Κύκλος και στοιχεία του κύκλου
- Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου
- Εφεξής γωνίες, συμπληρωματικές & παραπληρωματικές γωνίες
- Κατακορυφήν γωνίες
- Επίκεντρη γωνία. Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου. Σχέσεις τόξων του ίδιου ή ίσων κύκλων.
- Γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μία τέμνουσα

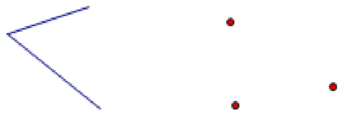
Δυσκολίες των μαθητών: Στοιχεία όπως το σημείο, η ευθεία, η ημιευθεία, το επίπεδο κ.λπ. δεν γίνονται άμεσα αντιληπτά στους μαθητές , λόγω του θεωρητικού τους χαρακτήρα. Συνήθως οι μαθητές αντιλαμβάνονται στοιχεία που χαράσσουν ή «βλέπουν», όπως για παράδειγμα τα ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι μπορούν να αναγνωρίσουν κατακορυφήν γωνίες στην εικόνα 1, ενώ όχι στην εικόνα 2. Ομοίως τα σημεία που είναι σχεδιασμένα στην εικόνα 3, δεν αντιλαμβάνονται ότι ανήκουν στην κυρτή γωνία.



Εικόνα 1

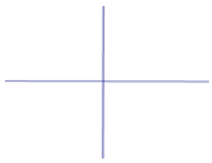


Εικόνα 2

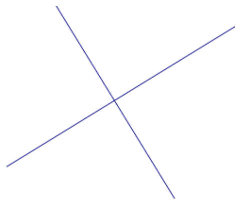


Εικόνα 3

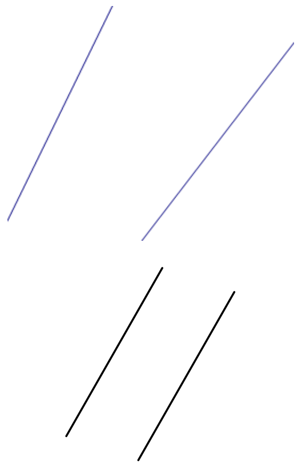
Ο συνηθισμένος τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα γεωμετρικά σχήματα (γραμμές που ακολουθούν τον οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό) εμποδίζουν τους μαθητές να διακρίνουν τις ίδιες σχέσεις σε άλλες καταστάσεις. Για παράδειγμα αναγνωρίζουν την καθετότητα στην περίπτωση της εικόνας 4 αλλά με δυσκολία στην περίπτωση της εικόνας 5. Ακόμα και η σχέση της παραλληλίας (ή της μη παραλληλίας) μπορεί να είναι δύσκολα αναγνωρίσιμη όταν οι ευθείες ακολουθούν πλάγιες διευθύνσεις (εικόνα 6)



Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6

Οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν με ένα «δυναμικό» τρόπο τα σχήματα, να φανταστούν τα σχήματα να στρέφονται, τις ευθείες και τις ημιευθείες να προεκτείνονται κ.λπ. Μία από τις αιτίες για το προηγούμενο είναι το ότι τα σχήματα που σχεδιάζουμε στο χαρτί ή στον πίνακα είναι στατικά. Για πολλούς μαθητές το σχήμα παριστάνει μόνο μια συγκεκριμένη κατάσταση.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η μετάβαση σε πιο αφαιρετικές μορφές σκέψης είναι μια διαδικασία αργή και δύσκολη για τους μαθητές και χρειάζεται να αναπτυχθεί μέσα από την ενασχόληση των ίδιων των μαθητών σε περιβάλλοντα και καταστάσεις που ενθαρρύνουν αυτή τη μετάβαση.

Η χρήση διαφόρων μέσων, όπως το διαφανές χαρτί, τα χειραπτικά υλικά, τα προγράμματα Δυναμικής Γεωμετρίας κ.λπ. αναδεικνύουν με διαφορετικό τρόπο το καθένα σχέσεις και ιδιότητες μεταξύ των σχημάτων. Ταυτόχρονα μπορούν να συμβάλουν, με κατάλληλες δραστηριότητες και παρεμβάσεις από την μεριά του διδάσκοντα, στο να αναπτύξουν οι μαθητές ένα δυναμικό τρόπο γεωμετρικής σκέψης.

Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών αλλά και την ανάδειξη ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των σχημάτων, προτείνεται η παρουσίαση και η κατασκευή σχημάτων να γίνεται σε μη συνηθισμένες θέσεις.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου. Κατακορυφήν γωνίες (ΠΜΑ: Γ1, Γ2, Γ4)

Φάση 1η Εξερεύνηση ιδιότητας

Ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές να σχεδιάσουν δύο τεμνόμενες ευθείες και να εικάσουν για σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των γωνιών που σχηματίζονται. Οι μαθητές μετρούν προσεγγιστικά με το μοιρογνωμόνιο. Αναμένεται ότι θα εικάσουν ότι υπάρχουν δύο ζεύγη ίσων γωνιών και είναι μάλλον απίθανο ότι θα εικάσουν ζεύγη παραπληρωματικών.

Η αρχή της 1ης φάσης χρειάζεται για να συνειδητο ποιήσουν όλοι οι μαθητές την κατάσταση που θα εξερευνήσουν

Ο διδάσκων θέτει το ερώτημα αν θα δημιουργούνται ζεύγη ίσων γωνιών σε κάθε περίπτωση που τέμνονται δύο ευθείες. Προτείνει να διερευνήσουν την κατάσταση στον υπολογιστή με κάποιο πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το συνοδευτικό αρχείο και επαληθεύουν με μέτρηση των γωνιών ότι σε κάθε τέτοια περίπτωση οι γωνίες είναι ίσες. Αναζητούν εξήγηση γιατί αυτά τα ζεύγη γωνιών είναι ίσα και συνεργάζονται για να δημιουργήσουν μια απόδειξη του ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. Με προτροπή του διδάσκοντα εξερευνούν τη σχέση που έχουν οι εφεξής γωνίες. Αν οι μαθητές εργαστούν με προσεκτικό δυναμικό χειρισμό και ειδικές τιμές για τις μετρήσεις είναι πολύ πιθανό ότι θα ανακαλύψουν ότι οι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Καταγράφουν όλα τα ζεύγη των παραπληρωματικών γωνιών, συζητούν και δικαιολογούν γιατί είναι παραπληρωματικές.

Διεργασία διερεύνησης με χρήση ψηφιακών εργαλείων

Διεργασία αιτιολόγησης

Διεργασία επικοινωνίας

Φάση 2η Ορισμός

Ο διδάσκων δίνει στους μαθητές ένα φύλλο χαρτί που περιέχει δύο στήλες. Η μία έχει τίτλο «Κατακορυφήν γωνίες» και η άλλη «Γωνίες που δεν είναι κατακορυφήν». Κάθε στήλη έχει αντιστοίχως παραδείγματα και μη παραδείγματα κατακορυφήν γωνιών (στα μη παραδείγματα πρέπει να έχουν περιληφθεί ζεύγη ίσων γωνιών με ένδειξη του μέτρου των γωνιών). Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τα κοινά χαρακτηριστικά των κατακορυφήν γωνιών και να γράψουν έναν ορισμό που θα τις περιγράφει. Οι μαθητές λόγω της προηγούμενης εξερεύνησης θα μπορέσουν να δώσουν έναν ορισμό αρκετά κοντά στον τυπικό ορισμό και θα διακρίνουν την διαφορά ορισμού και ιδιότητας.

Συνοδευτικό αρχείο: Α Γυμ - Διερεύνηση σχέσεων γωνιών.gsp

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία (Α΄ Γυμνασίου κεφ 1, 2 , 3) και τα βιβλία καθηγητή.

Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου:

  http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html

- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b

Βασικά θέματα: Γεωμετρικά σχήματα: Ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες (Α΄ και Β΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα, τετράπλευρα, κανονικά πολύγωνα κ.λπ.) και τις ιδιότητές τους. Η αναγνώριση αυτών των σχημάτων και των ιδιοτήτων τους αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για την περαιτέρω ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών.

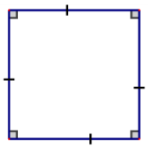
Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Στο Δημοτικό οι μαθητές έχουν γνωρίσει τα τρίγωνα και τα είδη τους, τα τετράπλευρα (τραπέζια, παραλληλόγραμμα, ορθογώνια κ.λπ.) και τα κανονικά πολύγωνα.

Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα εμπλακούν με τις παρακάτω έννοιες:

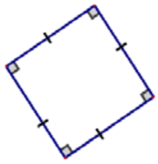
- Το πολύγωνο και τα στοιχεία του. Τα κανονικά πολύγωνα.
- Το τρίγωνο και τα στοιχεία του
- Το άθροισμα γωνιών τριγώνου
- Τα είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες , ως προς τις πλευρές.
- Ιδιότητες ισοσκελών και ισόπλευρων τριγώνων
- Τα τετράπλευρα και τα είδη τους
- Ιδιότητες των τετραπλεύρων
- Ταξινόμηση των τετραπλεύρων

Στην Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα εμπλακούν με την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο

Δυσκολίες των μαθητών: Πολλοί από τους μαθητές αντιλαμβάνονται τα σχήματα ολιστικά, δηλαδή δεν μπορούν να αναγνωρίσουν σχέσεις ή ιδιότητες, Έτσι για παράδειγμα μπορούν να αναγνωρίσουν ένα τετράγωνο σαν αυτό της εικόνας 7, αλλά δεν μπορούν να αναγνωρίσουν την ισότητα των πλευρών, την παραλληλία και τις ορθές γωνίες για να αναγνωρίσουν ότι και το τετράπλευρο της εικόνας 8 είναι τετράγωνο.



Εικόνα 7



Εικόνα 8

Λόγω της ολιστικής αντίληψης των σχημάτων πολλοί μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν σχήματα τα οποία είναι μέσα σε άλλα σχήματα.

Επίσης ενδέχεται να υπάρχουν μαθητές οι οποίοι δεν μπορούν να αναγνωρίσουν σχήματα όταν παρουσιάζονται με μη πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα ένα τρίγωνο στο οποίο η μια πλευρά του είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες.

Σε σχέση με την ταξινόμηση των σχημάτων μπορεί να υπάρχουν μαθητές που να έχουν τη δυνατότητα να καταγράψουν σε λίστα όλες τις ιδιότητες κάποιων σχημάτων π.χ. των τετραγώνων, των ορθογωνίων, των ρόμβων και των παραλληλογράμμων αλλά να μην διακρίνουν ότι αυτές είναι υποκατηγορίες η μια της άλλης. Δηλαδή ότι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και ρόμβοι και όλα τα ορθογώνια και οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα. Επίσης όταν ορίζουν ένα σχήμα είναι πιθανό να καταγράψουν σε λίστα όλες τις ιδιότητες των σχημάτων που γνωρίζουν π.χ. ισόπλευρο τρίγωνο είναι αυτό που έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η χρήση διαφόρων μέσων - εργαλείων (σχήματα από χαρτί ή χαρτόνι, διαφανές χαρτί, διάφοροι καμβάδες, tangram, γεωπίνακας, τυπικά γεωμετρικά όργανα, προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας κ.λπ.) μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν γεωμετρικές έννοιες, ιδιότητες, να αναγνωρίσουν γεωμετρικές σχέσεις και να διατυπώσουν εικασίες σε διαισθητικό επίπεδο. Αυτό θα αποτελέσει τη βάση για τη μετάβαση σε ένα ανώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Η γεωμετρική σκέψη αναπτύσσεται σταδιακά.. Οι μαθητές αρχικά αντιλαμβάνονται ολιστικά το γεωμετρικό αντικείμενο μέσα από τη μορφή του ενώ στη συνέχεια αναγνωρίζουν ιδιότητες, κάνουν συσχετίσεις μέσα από τις ιδιότητες και τέλος κατασκευάζουν απλές αποδείξεις. Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης απαιτεί κατάλληλα περιβάλλοντα στα οποία οι μαθητές παρατηρούν, εικάζουν και επιχειρηματολογούν.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου. Παραλλαγή της ΓΔ2 (ΠΜΑ: Γ1)

Ο διδάσκων δίνει στους μαθητές ένα φύλλο χαρτί στο οποίο υπάρχουν δύο στήλες. Η μία έχει ονομασία τετράπλευρα και παρουσιάζει παραδείγματα τετραπλεύρων όπως κυρτά και μη κυρτά, σε μη πρωτοτυπικές θέσεις και σχεδιάσεις κ.λπ. Η άλλη στήλη έχει ονομασία «όχι τετράπλευρα» και περιλαμβάνει μη παραδείγματα τετραπλεύρων. Οι μαθητές συζητούν και προσπαθούν να προσδιορίσουν ποια είναι τα κοινά χαρακτηριστικά

Διεργασία επικοινωνίας

στην κατηγορία των τετραπλεύρων και να διατυπώσουν έναν ορισμό. Συγκρίνουν τον ορισμό τους με τον τυπικό ορισμό και προσδιορίζουν όρους του τυπικού ορισμού με χαρακτηριστικά που βρήκαν. Στο τέλος συζητούν ποια από τα σχήματα της στήλης με τα τετράπλευρα τους έκαναν εντύπωση ότι ανήκαν εκεί.

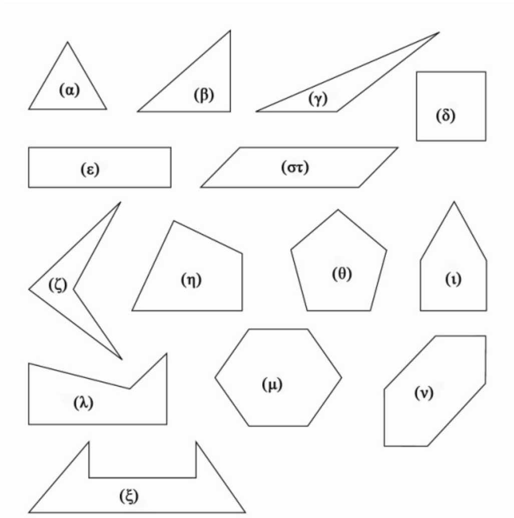
Α΄ Γυμνασίου. ΓΔ6 (ΠΜΑ: Γ4, Γ5)

Με αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές προσπαθούν να ανακαλύψουν ένα τύπο υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών ενός οποιουδήποτε πολυγώνου. Οι μαθητές σχεδιάζουν ένα τετράπλευρο και προσπαθούν να βρουν ένα τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών του. Συζητούν για διάφορες μεθόδους που μπορεί να σκέφτηκαν και εφαρμόζουν κάποια απ' αυτές. Προσπαθούν να επεκτείνουν την μέθοδό τους σε πολύγωνα με 5, 6, 7 πλευρές και καταγράφουν σε πίνακα το είδος του πολυγώνου, τον αριθμό τριγώνων που δημιούργησαν, το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου κ.λπ. Μέσα απ' αυτά τα στοιχεία προσπαθούν να βρουν τον τύπο που αναζητούν.

Α΄ Γυμνασίου. Κάρτες με σχήματα (ΠΜΑ: Γ1)

Ο διδάσκων μοιράζει στους μαθητές ένα φύλλο που περιέχει σχήματα διαφόρων κατηγοριών όπως αυτό της εικόνας. Οι μαθητές προσπαθούν να τα κατηγοριοποιήσουν με βάση διάφορες ταξινομήσεις όπως:

Κανονικά – όχι κανονικά – τρίγωνα – τετράπλευρα - όχι τετράπλευρα – σχήματα με ορθή γωνία κ.λπ. και εξηγούν τους λόγους για τους οποίους το εντάσσουν κάπου.



Β΄ Γυμνασίου. ΓΔ2 (ΠΜΑ: Γ3)

Με την δραστηριότητα αυτή οι μαθητές διερευνούν την σχέση που

Χρήση

έχουν η εγγεγραμμένη γωνία και η επίκεντρη γωνία όταν βαίνουν στο ίδιο τόξο.

ψηφιακών εργαλείων Διεργασία διερεύνησης

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία και τα βιβλία καθηγητή.

Για την Α΄ Γυμνασίου: κεφάλαια 1, 2, 3.

Για την Β΄ Γυμνασίου: κεφάλαιο 3

Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html
- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b

Βασικά θέματα: Γεωμετρικά σχήματα - Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (Α΄ και Β΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Ο σχεδιασμός και οι κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων είναι ένα από τα σημαντικά μέρη του ΠΣ σε σχέση με την γεωμετρία. Οι κατασκευές, ο σχεδιασμός και οι χαράξεις των γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση μιας ποικιλίας μέσων και μεθόδων (κανόνας, διαβήτης, χάρακας, μοιρογνωμόνιο, ψηφιακά εργαλεία, διπλώσεις χαρτιού, διαφανές χαρτί, κ.λπ.), βοηθάνε σημαντικά τους μαθητές στον εντοπισμό στοιχείων (σημείων, τμημάτων κ.λπ.) και στην αναγνώριση και χρήση σχέσεων και ιδιοτήτων που αποτελούν ένα μέρος γνώσης που επιδιώκουμε να αναπτύξουν οι μαθητές στο Γυμνάσιο και είναι απαραίτητες για την εισαγωγή τους στη Θεωρητική Γεωμετρία στο Λύκειο.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές στο Δημοτικό έχουν εμπλακεί με τη σχεδίαση παράλληλων και κάθετων ευθειών, παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, τετραγώνων, ρόμβων και πολυγώνων.

Στην Α΄ Γυμνασίου θα γίνουν επιλεγμένες κατασκευές με στόχο οι μαθητές όχι μόνο να αναπτύξουν ευχέρεια στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων και λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας, αλλά και να κατανοήσουν τη σημασία των σχέσεων και ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων για την κατασκευή τους. Για παράδειγμα η κατασκευή παράλληλης προς δοθείσα ευθεία από σημείο εκτός αυτής με χρήση κανόνα και γνώμονα βασίζεται στην ιδιότητα ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες ή στην ιδιότητα ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη έχουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, γωνίες ίσες θα είναι παράλληλες. Οι κυριότερες κατασκευές με τις οποίες θα εμπλακούν οι μαθητές στην Α΄ τάξη είναι:

- Κατασκευή κάθετων και παράλληλων ευθειών.
- Κατασκευή μεσοκαθέτου, κατασκευή κάθετης από σημείο προς ευθεία

- Κατασκευή γωνίας ίσης προς δεδομένη γωνία και με αρχική πλευρά δοθείσα ημιευθεία
- Κατασκευή της διχοτόμου μιας γωνίας
- Κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με δεδομένα τα μήκη των καθέτων πλευρών.
- Κατασκευή τριγώνου με δεδομένα τα μήκη των τριών πλευρών
- Κατασκευή τριγώνου με δεδομένα τα μήκη δύο πλευρών και το μέτρο της περιεχόμενης γωνίας
- Κατασκευή τριγώνου με δεδομένα το μήκος μιας πλευράς και τα μέτρα των προσκείμενων γωνιών
- Κατασκευή του ύψους ενός τριγώνου
- Κατασκευή παραλληλογράμμου με δεδομένα τα μήκη δύο διαδοχικών πλευρών και το μέτρο της περιεχόμενης γωνίας

Αντίστοιχα στην Β΄ τάξη οι κυριότερες κατασκευές είναι:

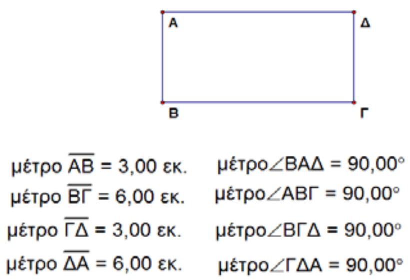
- Κατασκευή κύκλου που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία
- Κατασκευή του κοινού σημείου των 3 μεσοκαθέτων, 3 διχοτόμων, 3 υψών και 3 διαμέσων τριγώνου
- Κατασκευή κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών ενδέχεται να σχετίζονται με:

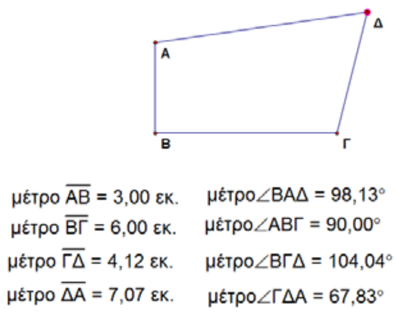
- Τη χρήση και τον χειρισμό των οργάνων μέτρησης και σχεδίασης
- Τη συνειδητοποίηση των σχέσεων και ιδιοτήτων που απαιτούνται για τη σχεδίαση ή την κατασκευή ενός σχήματος
- Την εξοικείωση με τα ψηφιακά εργαλεία, των δυνατοτήτων τους και των περιορισμών τους, για την δημιουργία κατασκευών.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Είναι σημαντικό οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο να είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση των τυπικών οργάνων σχεδίασης και χάραξης σχημάτων, καθώς και με βασικές γεωμετρικές κατασκευές, με διάφορα μέσα και μεθόδους. Ο σχεδιασμός και η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων δεν πρέπει να περιοριστεί μόνο στα παραδοσιακά μέσα (κανόνας, διαβήτης, γνώμονας, χάρακας, μοιρογνωμόνιο κ.λπ.) αλλά να γίνεται και με τη χρήση άλλων μέσων και μεθόδων όπως τα ψηφιακά μέσα (προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας, χελωνόκοσμος), με διαφανές χαρτί, με διπλώσεις κ.λπ. Το κάθε μέσο μπορεί να αναδείξει διαφορετικές πτυχές των εμπλεκόμενων εννοιών και έτσι να βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση αυτών των εννοιών, στην ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης και του γεωμετρικού τους συλλογισμού. Για παράδειγμα, η κατασκευή της διχοτόμου μιας γωνίας με μοιρογνωμόνιο στηρίζεται στην μέτρηση και την ισότητα των γωνιών μέσω του μέτρου τους, η κατασκευή με δίπλωση διαφανούς χαρτιού αναδεικνύει την ισότητα των γωνιών μέσω της ταύτισής τους αλλά και την διχοτόμο ως άξονα συμμετρίας της γωνίας, η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη βασίζεται σε γεωμετρικές ιδιότητες ή σχέσεις (ισότητα τριγώνων κ.λπ.), ενώ η κατασκευή της διχοτόμου σε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, αν και σχετικά απλοποιημένη, πέρα από την ακρίβεια της κατασκευής, αναδεικνύει το αναλλοίωτο της σχέσης της ισότητας των δύο γωνιών μέσω του δυναμικού χειρισμού και της συνεχούς αλλαγής των σχημάτων και των μετρήσεων και βοηθάει τους μαθητές στην απαλλαγή από πρωτοτυπικές εικόνες (συγκεκριμένος προσανατολισμός των σχημάτων).

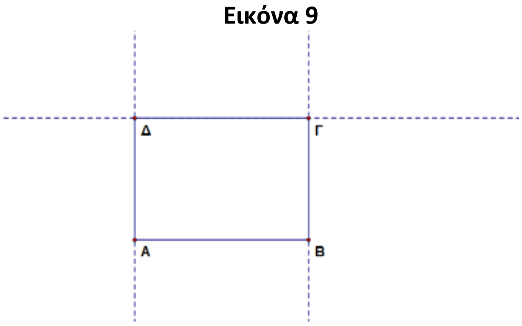
Ως προς το θέμα των κατασκευών με προγράμματα Δυναμικής Γεωμετρίας (Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad, Geogebra) ένας από τους τρόπους διδακτικής διαχείρισης, που ενδέχεται να βοηθήσει τους μαθητές στην ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης είναι η απαίτηση το γεωμετρικό σχήμα που θα δημιουργήσουν να μην αλλοιώνεται κατά την διαδικασία συρσίματος. Δηλαδή αν σύρουμε με το ποντίκι κάποια κορυφή του πρέπει το σχήμα να παραμένει στην κλάση σχημάτων που ανήκει (π.χ. ορθογώνια), ανεξάρτητα από τις αλλαγές θέσεων, προσανατολισμού, μεταβολής των διαστάσεών του κ.λπ. που θα γίνουν λόγω της δυναμικής μεταβολής του. Για να συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει οι μαθητές να το έχουν κατασκευάσει χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σχέσεις και ιδιότητες και όχι «στο περίπου», μέσω μέτρησης των πλευρών και γωνιών του. Το ορθογώνιο της εικόνας 9 έχει δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας τις ενδείξεις των μετρήσεων των γωνιών και των τμημάτων, οπότε αλλοιώνεται κατά τη διαδικασία συρσίματος κάποιας κορυφής του (εικόνα 10). Το ορθογώνιο της εικόνας 11 έχει δημιουργηθεί με βάση γεωμετρικές ιδιότητες (καθετότητα και παραλληλία ευθειών) και μπορεί και μεταβάλλεται δυναμικά παραμένοντας ορθογώνιο (εικόνα 12). Επίσης σημαντικό είναι οι μαθητές να προσπαθούν να περιγράψουν (λεκτικά ή/και γραπτά) την διαδικασία της κατασκευής που ακολούθησαν και να την δικαιολογήσουν (γιατί είναι ορθογώνιο, πέρα από το ότι δεν αλλοιώνεται κατά την διαδικασία συρσίματος).



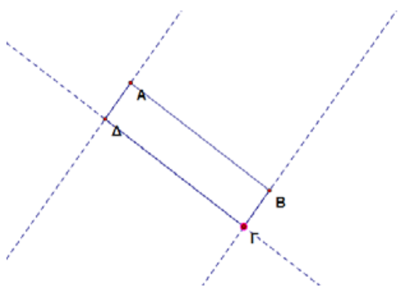
Εικόνα 9



Εικόνα 10



Εικόνα 11



Εικόνα 12

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

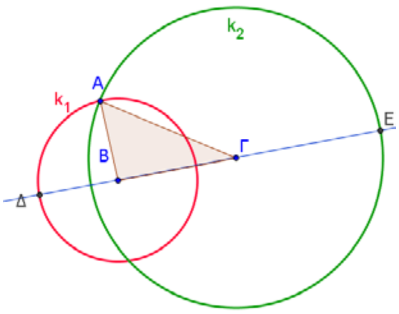
Α΄ Γυμνασίου: Κατασκευή περιμέτρου τριγώνου – Επεκτάσεις (ΠΜΑ: Γ5, Γ6, Γ7)

Στόχος της δραστηριότητας δεν είναι μόνο η παρουσίαση ενός τρόπου κατασκευής της περιμέτρου τριγώνου και η κατανόηση της, αλλά με αφορμή αυτή την κατασκευή η ανάδειξη τρόπου κατασκευής ισοσκελούς και ισόπλευρου τριγώνου, η σύνδεση με γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τον κύκλο, η ανάπτυξη διεργασιών συλλογισμού και επιχειρηματολογίας και η υπέρβαση πρωτοτυπικών αναπαραστάσεων.

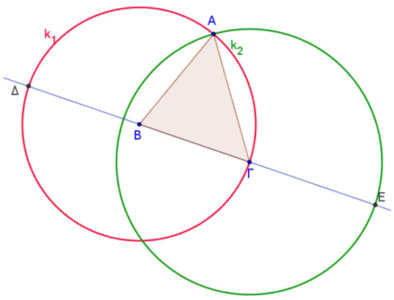
Οι μαθητές δουλεύουν ανά ομάδες και χρησιμοποιούν το αρχείο: Α Γυμ-Κατασκευή περιμέτρου- Επεκτάσεις.ggb, στο οποίο τους παρουσιάζεται μια κατασκευή της περιμέτρου ενός τριγώνου ΑΒΓ (εικόνα 13). Σε πρώτη φάση ζητάμε απ' αυτούς να εξηγήσουν γιατί με αυτή την κατασκευή το τμήμα ΔΕ αντιπροσωπεύει την περίμετρο του τριγώνου. Η περιγραφή της διαδικασίας κατασκευής δεν εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο έχουν δημιουργηθεί οι κύκλοι $\boldsymbol{k}_1$ και $\boldsymbol{k}_2$, δηλαδή πιο είναι το κέντρο και η ακτίνα τους. Αυτό είναι ένα σημείο που θα πρέπει να το ανακαλύψουν οι μαθητές και να ερμηνεύσουν τον ρόλο των κύκλων στην όλη κατασκευή. Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων μπορεί να μην είναι εμφανή σε όλους τους μαθητές ποια είναι, αλλά οι μεταβολές των κορυφών και η παρατήρηση των αλλαγών που πραγματοποιούνται στους κύκλους ενδέχεται να τους βοηθήσει να τα ανακαλύψουν.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και επίλυση προβλημάτων

Ο διδάσκων θα κρίνει αν είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία μέτρησης που διαθέτει το περιβάλλον ή όχι.



Εικόνα 13



Εικόνα 14

Σε δεύτερη φάση οι μαθητές μετακινούν την κορυφή Α και μεταβάλουν με αυτόν τον τρόπο τον κύκλο $\boldsymbol{k}_1$, ώστε αυτός να περάσει από το σημείο Γ (εικόνα 14), προσπαθούν να προσδιορίσουν το είδος του τρίγωνου ΑΒΓ και αιτιολογούν τις απαντήσεις τους.

Η ερώτηση σχετικά με το είδος σκόπιμα δεν προσδιορίζει το κριτήριο, ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν ότι με τα δεδομένα της κατάστασης, μόνο το κριτήριο των πλευρών μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αφού το ΑΒΓ μπορεί να γίνει οξυγώνιο ή ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο με κατάλληλη

Ο διδάσκων εκμεταλλευόμενος τις παρατηρήσεις, αιτιολογήσεις και συμπεράσματα των μαθητών αναδεικνύει τα μη πρωτοτυπικά χαρακτηριστικά μετακίνηση του Α. Πράττουν ομοίως και μετακινούν την κορυφή Α ώστε ο κύκλος $\boldsymbol{k}_2$ να διέλθει από το σημείο Β και βγάζουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

(συνήθως τα ισοσκελή παρουσιάζονται με την βάση οριζόντια και με ΑΒ=ΑΓ)

Σε τρίτη φάση οι μαθητές προσπαθούν να αξιοποιήσουν τα παραπάνω και να κατασκευάσουν σε πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, ισοσκελές τρίγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο, που να «αντέχουν» στην διαδικασία συρσίματος, περιγράφοντας τη διαδικασία κατασκευής και δικαιολογώντας την.

Διεργασίες επικοινωνίας και επιχειρηματολογίας

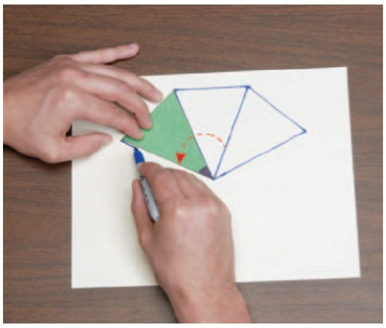
Β΄ Γυμνασίου: Κατασκευή κανονικών πολυγώνων (ΠΜΑ: Γ3, Γ4, Γ5)

Οι μαθητές σχεδιάζουν ένα ισοσκελές τρίγωνο σε χαρτόνι, το κόβουν με ψαλίδι, μαρκάρουν τη γωνία που είναι απέναντι από τη βάση και το χρησιμοποιούν ως πατρόν για να σχεδιάσουν στο χαρτί το περίγραμμα του. Με διαδοχικές στροφές με κέντρο την κορυφή που είναι απέναντι από τη βάση και με γωνία στροφής τη γωνία της κορυφής σχεδιάζουν διαδοχικά άλλα επτά τρίγωνα (εικόνα 15). Συζητούν για το αν το σχήμα που έφτιαξαν (για παράδειγμα αυτό της εικόνας 16) είναι οκτάγωνο και τι θα πρέπει να συμβεί για να γίνει οκτάγωνο.

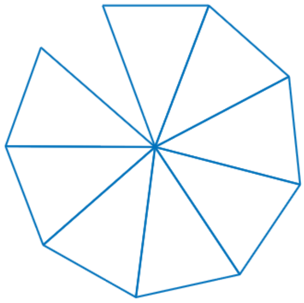
Αναμένεται ότι θα το συσχετίσουν με την διαίρεση της πλήρους γωνίας σε 8 ίσα μέρη και τη δημιουργία ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής 45°. Αφού σχεδιάσουν με την προηγούμενη διαδικασία το οκτάγωνο συζητούν για άλλα χαρακτηριστικά του σχήματος όπως αν είναι κανονικό και γιατί, τι συμπεραίνουν από το γεγονός ότι οι κορυφές του ισαπέχουν από το κέντρο ως προς το οποίο έγιναν οι στροφές, αν θα προέκυπτε το ίδιο σχήμα με άλλον μετασχηματισμό ή αν θα μπορούσε να προκύψει κανονικό πολύγωνο αν το αρχικό τρίγωνο δεν ήταν ισοσκελές κ.λπ. Με βάση τις ιδέες και τα συμπεράσματα που θα προκύψουν από τα προηγούμενα, οι μαθητές προσπαθούν να βρουν ένα γενικό τρόπο κατασκευής κανονικών πολυγώνων, εγγεγραμμένων σε κύκλο με χρήση μόνο κανόνα, διαβήτη και μοιρογνωμονίου. Περιγράφουν γραπτά την διαδικασία κατασκευής και αιτιολογούν γιατί το πολύγωνο που θα προκύψει με αυτή την διαδικασία είναι κανονικό.

Διεργασίες επιχειρηματολογίας και αιτιολόγησης

Διεργασίες επικοινωνίας και αιτιολόγησης



Εικόνα 15



Εικόνα 16

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

Α΄ Γυμνασίου: Εύρεση του κέντρου κύκλου (ΠΜΑ: Γ6, Γ7)

Μετά την κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος οι μαθητές προσπαθούν να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τις ιδιότητες των σημείων της μεσοκαθέτου και τον ορισμό του κύκλου για να βρουν το κέντρο ενός κύκλου.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία και τα βιβλία καθηγητή της Α΄ και Β΄ τάξης.

Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί και παράγεται με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου: http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html
- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b

Βασικά θέματα: Προσανατολισμός στον χώρο (Β΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Το διάνυσμα εισάγεται ως ένα βασικό γεωμετρικό εργαλείο αναπαράστασης του προσανατολισμού στο χώρο, με κύριο στόχο να κατανοηθεί η σημασία του σε σχέση με τις έννοιες του ευθύγραμμου τμήματος, της παραλληλίας και της μεταφοράς.

Προηγούμενη γνώση: Οι μαθητές στο Δημοτικό έχουν εμπλακεί με έννοιες προσανατολισμού στον χώρο , όπως για παράδειγμα χάρτες και σύνθετα σημεία του ορίζοντα, γεωγραφικό μήκος και πλάτος κ.λπ.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών ενδέχεται να σχετίζονται με την διάκριση ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα, δηλαδή ότι το τελευταίο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και δεν είναι μόνο το μήκος του που το καθορίζει , αλλά ταυτόχρονα η διεύθυνση και η φορά. Επίσης μπορεί να έχουν δυσκολίες στη διάκριση ανάμεσα στη διεύθυνση και τη κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά μαζί) λόγω του τρόπου χρήσης των δύο εννοιών στην καθημερινή ζωή και στα μαθηματικά.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν τα χαρακτηριστικά του διανύσματος και πώς αυτά το διαφοροποιούν από το ευθύγραμμο τμήμα. Αυτό μπορεί να γίνει με δραστηριότητες που το συσχετίζουν με τον προσανατολισμό στο χώρο καθώς και με αναφορές σε καθημερινές καταστάσεις που να είναι γνώριμες στους μαθητές, όπως για παράδειγμα οι αναφορές στον τρόπο πνοής των ανέμων στα μετεωρολογικά δελτία. Επίσης χρειάζεται να γίνει η διάκριση ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες της διεύθυνσης και της κατεύθυνσης σε σχέση με την καθημερινή τους χρήση, αφού στην καθημερινή ζωή αναφερόμαστε σε διεύθυνση ή κατεύθυνση, χωρίς διάκριση και λόγω των συμφραζομένων υπάρχει και η έννοια της φοράς. Στις διαφορές ανάμεσα σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα διάνυσμα, να επισημανθεί ότι ενώ στα ευθύγραμμα τμήματα η ισότητα μηκών σημαίνει ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων στα διανύσματα η ισότητα μέτρων δεν σημαίνει απαραίτητα και ισότητα διανυσμάτων είτε λόγω διαφορετικής διεύθυνσης ή διαφορετικής φοράς. Τα παραδείγματα σχετικά με ίσα, αντίθετα και διαφορετικά διανύσματα μπορούν να μην περιοριστούν στο επίπεδο αλλά και στο χώρο, σε γεωμετρικά στερεά που να είναι γνώριμα στους μαθητές όπως ο κύβος και το παραλληλεπίπεδο. Επίσης, το διάνυσμα πρέπει να συνδεθεί με φυσικά μεγέθη (δύναμη, ταχύτητα) μέσα από κατάλληλα παραδείγματα. Πρέπει να σημειωθεί ότι με βάση το ΠΣ δεν γίνεται επέκταση στις πράξεις των διανυσμάτων, αλλά το διάνυσμα συνδέεται με την έννοια της μετατόπισης ενός ευθύγραμμου σχήματος στη τροχιά των μετασχηματισμών. Επίσης το διάνυσμα πρέπει να συνδεθεί με φυσικά μεγέθη (δύναμη, ταχύτητα κ.λπ.) μέσα από κατάλληλα παραδείγματα.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Β΄ Γυμνασίου: Συμπληρωματική της ΓΔ1 του ΠΣ (ΠΜΑ: Γ1, Γ2)

*Φάση 1^{η} :*Δίνεται στους μαθητές ο χάρτης της εικόνας 1 και τους παρουσιάζεται η παρακάτω δραστηριότητα:

Ένα αερόστατο πετάει σε μία περιοχή της οποίας ο χάρτης είναι αυτός της εικόνας 17. Το αερόστατο ανεβαίνει σε ύψος και κάποιες στιγμές συναντάει διαφορετικούς ανέμους που του αλλάζουν την πορεία.

α) Αν ξέρετε ότι ο αερόστατο ξεκίνησε από την θέση Α και ταξίδευσε απόσταση 50 km μπορείτε να βρείτε το σημείο στο οποίο έφτασε; Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

Παρακάτω δίνονται οι περιγραφές της υπόλοιπης διαδρομής που ακολούθησε το αερόστατο.

β) Διένυσε 20 km με κατεύθυνση νοτιοδυτική.

γ) Στη συνέχεια διένυσε απόσταση 30km με κατεύθυνση

Συνοδευτικό αρχείο εργασίας: Β΄ Γυμνασίου - Προσανατολισμός στον χώρο - Πτήση με αερόστατο.doc

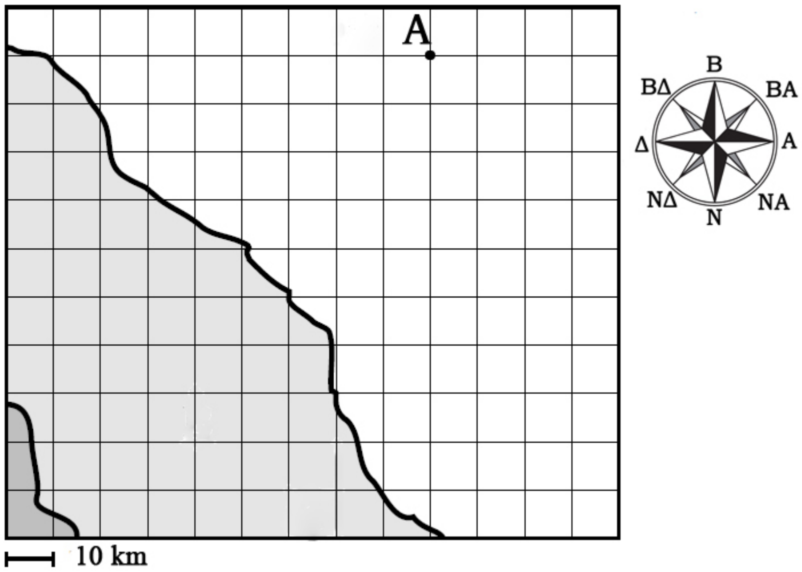
Το ερώτημα (α) έχει ως σκοπό να αναδείξει ότι δεν είναι δυνατόν ο προσδιορισμός της θέσης του αερόστατου χωρίς τη γνώση της κατεύθυνσης. Μετά τη συζήτηση των επιχειρημάτων των μαθητών ο διδάσκων τους δίνει κάποια κατεύθυνση π.χ.

νοτιοανατολική.

δ) Ακολούθως διένυσε απόσταση 40 km με κατεύθυνση βορειοανατολική.

ε) Στο τελευταίο μέρος της διαδρομής του ταξίδευσε 40 km με κατεύθυνση νοτιοανατολική και προσγειώθηκε.

Να σχεδιάσετε στον χάρτη την διαδρομή του αερόστατου με κατάλληλο τρόπο, ώστε κάποιος που θα τον κοιτάξει να καταλάβει τις πορείες που ακολούθησε αυτό.



Εικόνα 17

δυτική.
Τα ερωτήματα (β) και (δ) μπορούν να δώσουν αφορμή για συζήτηση της έννοιας της διεύθυνσης και την διαφορά της από την κατεύθυνση.
Ο τετραγωνισμένος καμβάς θα βοηθήσει τους μαθητές να προσδιορίσουν και να σχεδιάσουν πλάγιες διευθύνσεις και σωστές αποστάσεις με βάση την κλίμακα του χάρτη και με την χρήση του διαβήτη.

Φάση 2η : Αξιοποιείται από τον διδάσκοντα η δραστηριότητα ΓΔ1 που αναφέρεται στο πρόγραμμα σπουδών.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ το σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 2ο (μόνο η παράγραφος 2.5), βιβλίο καθηγητή Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου.

Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου: http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html
- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b

Βασικά θέματα: Μετασχηματισμοί (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Με τους μετασχηματισμούς βασικές έννοιες της γεωμετρίας όπως η ισότητα και η ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων, εντάσσονται σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο. Οι ισομετρίες (μεταφορά, στροφή, ανάκλαση) και η ομοιοθεσία δείχνουν ότι η ισότητα και η ομοιότητα υπακούουν σε συγκεκριμένες ιδιότητες των μετασχηματισμών (διατήρηση γωνιών και αποστάσεων, διατήρηση γωνιών και λόγων αποστάσεων αντίστοιχα) και δεν εξαρτώνται από την θέση ή τον προσανατολισμό των σχημάτων. Αυτό που επιδιώκεται είναι να αποκτήσουν οι μαθητές, μέσω των μετασχηματισμών, μια ευελιξία στον τρόπο της γεωμετρικής τους σκέψης και να τους χρησιμοποιούν ως εργαλείο για την μελέτη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

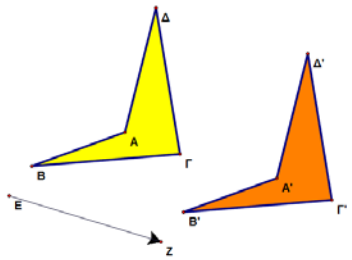
Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές έχουν καθημερινές άτυπες εμπειρίες σε σχέση με την ανάκλαση (είδωλα στον καθρέφτη, συμμετρικές ως προς άξονα εικόνες), τη μεταφορά (επαναλαμβανόμενα διακοσμητικά - γεωμετρικά μοτίβα), τη στροφή (καλειδοσκόπια, ζάντες αυτοκινήτων) και την ομοιοθεσία (μεγεθύνσεις – σμικρύνσεις σχημάτων και φωτογραφιών) και στο Δημοτικό έχουν γνωρίσει πτυχές από τα διάφορα είδη μετασχηματισμών[7]. Στην Β΄ Γυμνασίου θα εμπλακούν με τη μεταφορά σχημάτων, τη στροφή τους ως προς σημείο υπό συγκεκριμένη γωνία (και ως ειδική περίπτωση την κεντρική συμμετρία) και την ανάκλαση τους ως προς ευθεία, (αξονική συμμετρία). Μέσω των συμμετριών (αξονικής και κεντρικής) θα μελετήσουν και θα αιτιολογήσουν ιδιότητες των σχημάτων. Στην Γ΄ τάξη οι μαθητές θα εμπλακούν με την ομοιοθεσία και θα την συνδέσουν με την ομοιότητα των σχημάτων. Θα εξετάσουν χαρακτηριστικά του συνόλου των μετασχηματισμών καθώς και συνθέσεις μετασχηματισμών και θα εμπλακούν με τα κριτήρια ισότητας και ομοιότητας τριγώνων.

Δυσκολίες των μαθητών:

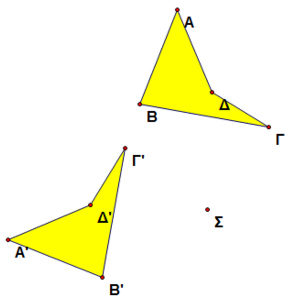
- Η αναγνώριση των συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα ή σχημάτων με άξονα συμμετρίας είναι απλή για τους μαθητές, όταν ο άξονας συμμετρίας έχει κατακόρυφο ή οριζόντιο προσανατολισμό αλλά δυσκολεύει όταν ο άξονας είναι πλάγιος ή οι πλευρές του σχήματος δεν είναι παράλληλες προς τον άξονα.
- Ως προς την κατασκευή του συμμετρικού ως προς άξονα σχήματος, συνήθως κάνουν μεταφορά αντί για ανάκλαση.
- Οι μαθητές είναι πιθανό να μην έχουν ασκηθεί σε νοερούς μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι απαραίτητοι στη στροφή σχήματος ή στην κεντρική συμμετρία και για αυτό το λόγο ένα μέρος των δραστηριοτήτων πρέπει να περιλαμβάνει πρακτικές περιστροφές, δηλαδή περιστροφές σχημάτων από χαρτόνι ή περιστροφή σχεδίου σε διαφανές χαρτί πάνω από το πρωτότυπο κ.λπ.
- Στον μετασχηματισμό της στροφής ως προς κέντρο και υπό συγκεκριμένη γωνία, διαφορετική των 180°, οι μαθητές ενδέχεται να δυσκολεύονται με τα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού όπως: η φορά (που κατά σύμβαση είναι η αριστερόστροφη) ή η 1-1 αντιστοιχία των σημείων του σχήματος και της εικόνας του.

[7] Ο διδάσκων πρέπει να λάβει υπ' όψη ότι η στροφή σχήματος , όπως και η μεταφορά σχήματος εισάγονται με το τωρινό πρόγραμμα σπουδών και δεν υπήρχαν στα παλιότερα προγράμματα.

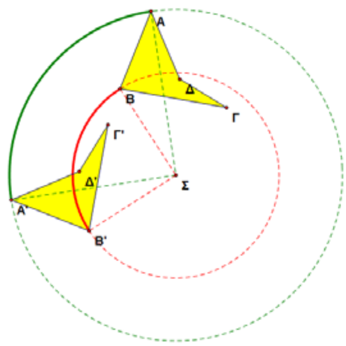
Προτάσεις για την διδακτική διαχείριση: Η εισαγωγή στον μετασχηματισμό της μεταφοράς μπορεί να γίνει με αναφορά σε οικίες γεωμετρικές καταστάσεις, στις οποίες έχει χρησιμοποιηθεί έμμεσα η κίνηση των σχημάτων, όπως είναι η γνωστή κατασκευή της παράλληλης προς δοθείσα ευθεία με την μετατόπιση του γνώμονα. Ο μετασχηματισμός της μεταφοράς συνδέεται με την έννοια του διανύσματος, που θα έχει αναπτυχθεί σε προηγούμενη ενότητα. Κατά την μεταφορά ενός σχήματος κατά διάνυσμα $\overrightarrow{ΕΖ}$, κάθε σημείο του σχήματος μετατοπίζεται κατ' αυτό το διάνυσμα και έτσι δημιουργείται σχήμα ίσο με το αρχικό και με τον ίδιο προσανατολισμό. Η μεταφορά ευθείας είναι ευθεία παράλληλη προς την αρχική και η μεταφορά γωνίας είναι γωνία ίση προς την αρχική της οποίας οι πλευρές είναι παράλληλες προς τις πλευρές της αρχικής.



Η στροφή (ή περιστροφή) ενός σχήματος ως προς κάποιο σημείο, με γωνία φ, καθορίζεται από το σημείο ως προς το οποίο γίνεται η περιστροφή (κέντρο στροφής ή περιστροφής) και από τη γωνία στροφής, της οποίας την φορά την θεωρούμε συμβατικά αντίστροφη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού.



Εικόνα 18



Εικόνα 19

Στην εικόνα 18, παρουσιάζεται το σχήμα Α΄Β΄Γ΄Δ΄ που είναι η στροφή του σχήματος ΑΒΓΔ ως προς το σημείο Σ, με γωνία 90°. Τα ομόλογα (ή αντίστοιχα) σημεία Α και Α΄ ισαπέχουν από το Σ, ομοίως τα Β και Β΄ κ.λπ. Οι γωνίες ΑΣΑ΄, ΒΣΒ΄ κ.λπ. είναι ίσες με 90°. Τα ομόλογα σημεία Α και Α΄ είναι τα άκρα τόξου κέντρου Σ, ακτίνας ΣΑ και μέτρου ίσου με το μέτρο της γωνίας στροφής (εικόνα 19). Η περιστροφή σχήματος κατά 180° ως προς κάποιο σημείο είναι ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού της στροφής και σχετίζεται με την κεντρική συμμετρία.

Δραστηριότητες αναγνώρισης και επιβεβαίωσης του μετασχηματισμού που έχει γίνει σε ένα σχήμα διευκολύνουν την ανάδειξη ιδιοτήτων, όπως ισότητες και αναλογίες. Οι συγκρίσεις βοηθούν του μαθητές να εντοπίσουν μόνοι τους αυτές τις ιδιότητες.

Οι κατασκευές σχημάτων συμμετρικών ως προς κέντρο με στροφή 180° είναι πιο απλές αν οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί να περιστρέφουν τα σχήματα. Η αναγνώριση ιδιοτήτων που έχουν τα σχήματα λόγω κεντρικής συμμετρίας (π.χ. παραλληλόγραμμα) βοηθείται σημαντικά από την αντιγραφή του σχήματος σε διαφανές χαρτί και την περιστροφή του πάνω από το πρωτότυπο ως προς το κέντρο συμμετρίας.

Η ευκολία με την οποία αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα συμμετρικά, ως προς άξονα, σχήματα δεν οδηγεί με την ίδια ευκολία στην κατασκευή τους. Το τετραγωνισμένο χαρτί διευκολύνει τις μετρήσεις και τις κατασκευές. Επίσης οι κατασκευές συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα σε διαφανές χαρτί και ο έλεγχος με δίπλωση επιτρέπουν στους μαθητές να διαπιστώσουν και να διορθώσουν τις ελλείψεις τους αλλά και να αναγνωρίσουν ισότητες τμημάτων και γωνιών.

Οι κατασκευές ομοιόθετων σχημάτων προτείνεται να γίνουν αρχικά με την χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού που θα επιτρέψει στους μαθητές να «δουν» σχέσεις και ιδιότητες όπως για παράδειγμα τη σχέση των περιμέτρων ή τη σχέση των εμβαδών δύο ομοιόθετων σχημάτων.

Το θεώρημα του Θαλή δεν αποτελεί μέρος του ΠΣ, αλλά ο διδάσκων μπορεί να το διδάξει ως εφαρμογή των ομοίων τριγώνων (βλ. σχετικά ΓΔ4 του ΠΣ).

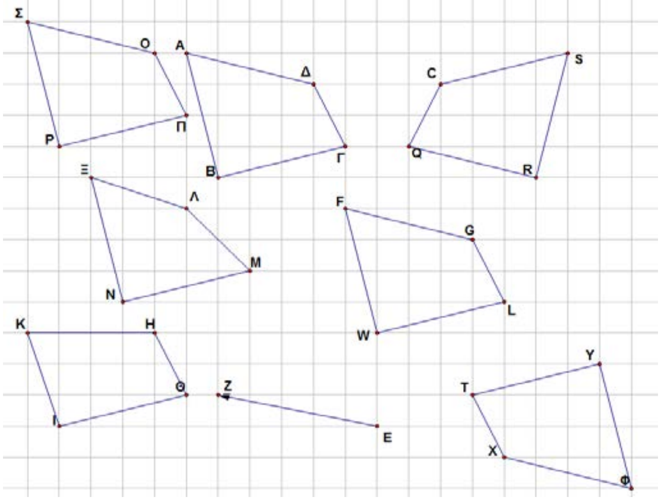
Γενικά για την μελέτη των μετασχηματισμών ενδείκνυται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, γιατί οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν, να διερευνήσουν, να παρατηρήσουν και να προβούν σε εικασίες σχετικά με ιδιότητες και χαρακτηριστικά των μετασχηματισμών.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

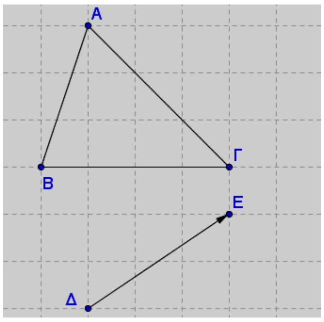
Β΄ Γυμνασίου: Μετασχηματισμός μεταφοράς (ΠΜΑ: Γ2, Γ5, Γ6)

Οι μαθητές αναγνωρίζουν και αιτιολογούν ποιο από τα τετράπλευρα της εικόνας 21, είναι η μετατόπιση του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατά το διάνυσμα $\vec{EZ}$. Επίσης εξετάζουν και αιτιολογούν ποιά από τα υπόλοιπα τετράπλευρα μπορεί να προκύψουν από τη μεταφορά του ΑΒΓΔ. Ακόμα οι μαθητές κατασκευάζουν σε τετραγωνισμένο χαρτί την εικόνα Α΄Β΄Γ΄ ενός τριγώνου ΑΒΓ (εικόνα 22) , σύμφωνα με τον μετασχηματισμό της μεταφοράς του κατά το διάνυσμα $\vec{DE}$. Εξηγούν την μέθοδο που ακολούθησαν. Συζητούν και αιτιολογούν, ποιο πρέπει να είναι το διάνυσμα μεταφοράς ώστε το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ να συμπέσει με το τρίγωνο ΑΒΓ.

Συνοδευτικό αρχείο εργασίας: Β΄ Γυμν - Μετασχηματισμός μεταφοράς (ΠΜΑ Γ2, Γ5, Γ6).doc
Ο διδάσκων ζητάει να προσδιορίσουν το διάνυσμα μεταφοράς, τα αντίστοιχα τμήματα και τις αντίστοιχες γωνίες και να περιγράψουν τις μεταξύ τους σχέσεις.



Εικόνα 20



Εικόνα 11

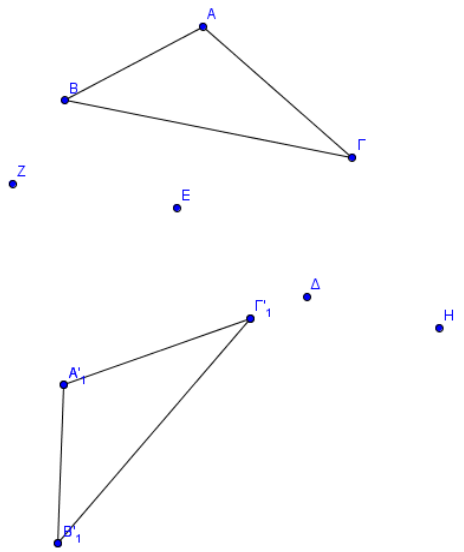
Β΄ Γυμνασίου: Εύρεση του κέντρου και της γωνίας στροφής (ΠΜΑ: Γ4, Γ5)

Οι μαθητές προσπαθούν να προσδιορίσουν ως προς ποιο από τα σημεία Δ, Ε, Ζ και Η πρέπει να περιστραφεί το τρίγωνο ΑΒΓ ώστε να προκύψει το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ (εικόνα 22). Συζητούν και προτείνουν τρόπους με τους οποίους μπορούν να αποκλείσουν κάποια από τα σημεία ως δυνατά κέντρα περιστροφής. Για παράδειγμα, με εκτίμηση των αποστάσεων που έχουν αυτά τα σημεία από αντίστοιχα σημεία των δύο τριγώνων ή με μέτρηση αυτών των αποστάσεων, σύγκριση με το διαβήτη κ.λπ. εικάζουν για το σημείο περιστροφής και εφαρμόζουν διάφορες μεθόδους για να επιβεβαιώσουν την εικασία τους.

Διεργασία επικοινωνίας

Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας

Με βάση το γεγονός ότι το σημείο περιστροφής πρέπει να ισαπέχει από τα αντίστοιχα σημεία, συζητούν και προτείνουν μεθόδους γεωμετρικού προσδιορισμού του κέντρου περιστροφής τις οποίες και εφαρμόζουν. Έπειτα συζητούν για μέθοδο προσδιορισμού της γωνίας στροφής.



Εικόνα 22

Β΄ Γυμνασίου: Παραλλαγή της ΓΔ5 του ΠΣ (ΠΜΑ: Γ4, Γ7, Γ8)

Ο διδάσκων δίνει στους μαθητές διαφανές χαρτί, πάνω στο οποίο υπάρχουν σχεδιασμένα δύο συμμετρικά, ως προς άξονα, τρίγωνα, χωρίς όμως να είναι σχεδιασμένος ο άξονας συμμετρίας. Οι μαθητές προσπαθούν με δίπλωση του χαρτιού να προσδιορίσουν τον άξονα συμμετρίας τον οποίο και σχεδιάζουν με βάση την γραμμή τσάκισης που θα έχουν κάνει στο χαρτί. Με προτροπή του διδάσκοντα σχεδιάζουν τα τμήματα που έχουν ως άκρα αντίστοιχες κορυφές των τριγώνων και εξετάζουν την σχέση που έχει ο άξονας με αυτά τα τμήματα. Διαπιστώνουν και δικαιολογούν, μέσω της δίπλωσης του χαρτιού ως προς τον άξονα συμμετρίας, ότι αυτός είναι η κοινή μεσοκάθετος των τμημάτων. Συζητούν σε πόσα τμήματα, που ενώνουν αντίστοιχα σημεία, πρέπει να χαράξουν την μεσοκάθετο για τον προσδιορισμό του άξονα συμμετρίας. Προτείνουν τρόπο κατασκευής του άξονα συμμετρίας με κανόνα και διαβήτη τον οποίο και εφαρμόζουν.

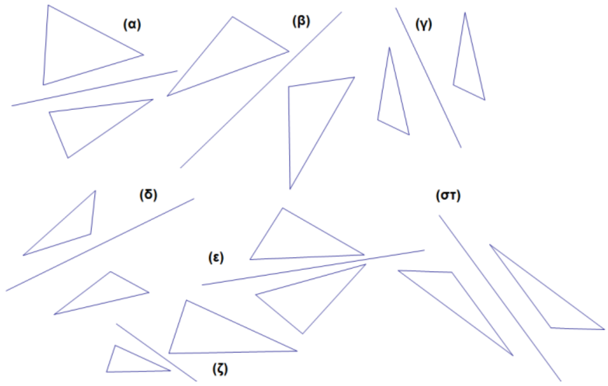
Διεργασία αιτιολόγησης

Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας

Β΄ Γυμνασίου: Αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα – Κατασκευή άξονα συμμετρίας (ΠΜΑ: Γ4, Γ7, Γ8)

Συνοδευτικό αρχείο εργασίας: Β΄ Γυμ - Αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα – Κατασκευή άξονα συμμετρίας (ΠΜΑ Γ4, Γ7, Γ8).doc

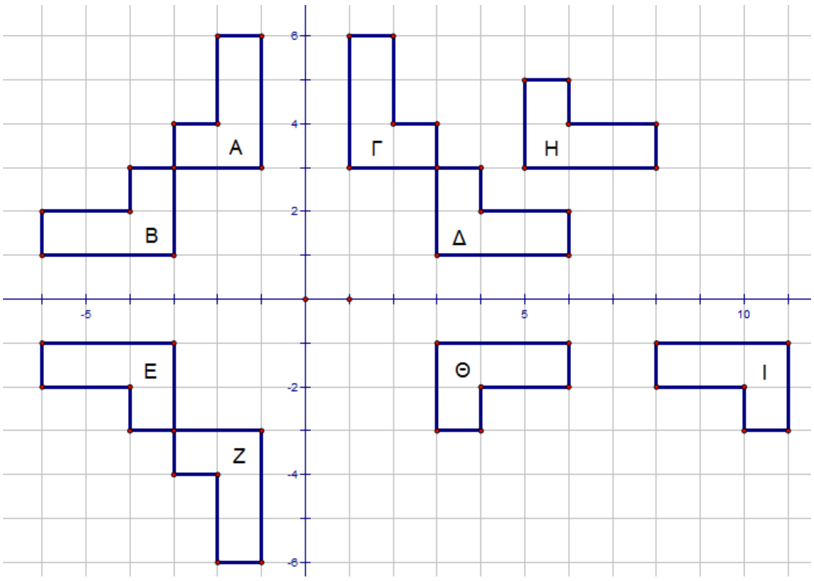
Οι μαθητές προσπαθούν να προσδιορίσουν ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα που είναι σχεδιασμένος και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Εξηγούν τον τρόπο που σκέφτηκαν και τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Για παράδειγμα, μπορεί να απέκλεισαν κάποιες περιπτώσεις και εξηγούν τα κριτήρια αποκλεισμού. Στη συνέχεια ο διδάσκων προτείνει να εξετάσουν μήπως υπάρχει κάποια περίπτωση που να μπορούν τα σχήματα να γίνουν συμμετρικά ως προς άξονα, αλλά ο άξονας δεν είναι σωστά σχεδιασμένος και τους προτρέπει να σχεδιάσουν τον σωστό άξονα.



Ο αποκλεισμός των περιπτώσεων που δε μπορούν να έχουν σχέση με το μετασχηματισμό της ανάκλασης, θα επιτρέψει στους μαθητές να επικεντρωθούν στην περίπτωση (δ)

Β΄ Γυμνασίου: Ποιος είναι ο μετασχηματισμός; (ΠΜΑ: Γ5, Γ6, Γ7)

Ο διδάσκων προτείνει ένα σχήμα από τα παρακάτω που θα είναι το αρχικό και ένα που θα είναι η εικόνα του και οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τον μετασχηματισμό (ή τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς) που θα δημιουργήσει το επιθυμητό αποτέλεσμα, καθώς και τα χαρακτηριστικά του, όπως για παράδειγμα το κέντρο και τη γωνία στροφής αν ο μετασχηματισμός είναι στροφή.

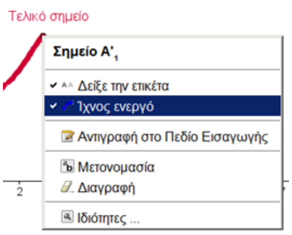


Β΄ Γυμνασίου: ΓΔ4 (ΠΜΑ: Γ5, Γ6, Γ8)

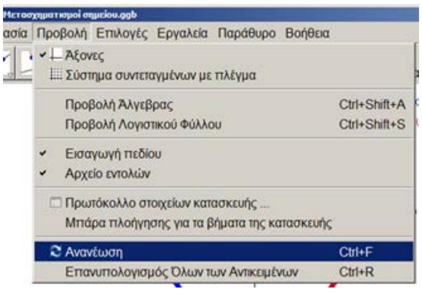
Οι μαθητές διερευνούν και προσπαθούν να ανακαλύψουν την σχέση που έχει ένα σημείο (τελικό) ως προς ένα άλλο σημείο (αρχικό). Το αρχικό σημείο έχει υποστεί έναν μετασχηματισμό (ανάκλαση ως προς ευθεία ή μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα ή στροφή ως προς σημείο) και οι μαθητές μπορούν να κινούν το αρχικό σημείο και να παρατηρούν την μεταβολή των θέσεων του τελικού. Με βάση τις γνώσεις που έχουν για τις ιδιότητες των μετασχηματισμών, οι μαθητές προσπαθούν να προσδιορίσουν το είδος τους και τα χαρακτηριστικά τους, όπως για παράδειγμα αν είναι ανάκλαση και ποιος είναι ο άξονας ανάκλασης.

Για να βοηθηθούν οι μαθητές στην ανακάλυψη του είδους του μετασχηματισμού, ο διδάσκων προτείνει να εμφανίζονται τα ίχνη των τροχιών που διαγράφουν τα δύο σημεία καθώς αυτοί σέρνουν σε διάφορες θέσεις το αρχικό σημείο. Αυτό επιτυγχάνεται αν οι μαθητές κάνουν δεξί κλικ σε κάθε σημείο και επιλέξουν *Ίχνος ενεργό* από το μενού που θα εμφανισθεί (εικόνα 23). Η διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί για το τελικό σημείο σε κάθε νέα διερεύνηση. Τα προηγούμενα ίχνη σβήνουν αν οι μαθητές επιλέξουν *Ανανέωση* από το μενού *Προβολή* (εικόνα 24).

Ένας άλλος στόχος της δραστηριότητας είναι να διερευνήσουν οι μαθητές τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες του αρχικού και του τελικού σημείου, αφότου έχουν βρει το είδος του μετασχηματισμού και να γενικεύσουν. Ο διδάσκων θα κρίνει αν θα οδηγήσει τους μαθητές προς τον προηγούμενο στόχο και αν όλες οι διερευνήσεις της δραστηριότητας θα γίνουν.
Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές συζητούν και εξηγούν τους τρόπους και τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Στην διάρκεια της συζήτησης με όλη την τάξη επιβεβαιώνουν ή απορρίπτουν τα είδη και τα χαρακτηριστικά των μετασχηματισμών που βρήκαν επιχειρηματολογώντας σχετικά.



Εικόνα 23

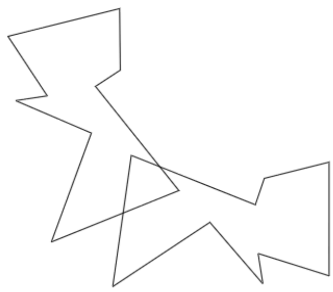


Εικόνα 24

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

Β΄ Γυμνασίου

1. Οι μαθητές σχεδιάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη στροφή ενός τριγώνου ΑΒΓ κατά 90° ως προς το σημείο Β και εξηγούν τη μέθοδο που ακολούθησαν.
2. Ο διδάσκων δίνει στους μαθητές διάφορα είδη πολυγώνων (κυρτά, μη κυρτά, κανονικά και μη, τραπέζια, διάφορα είδη παραλληλογράμμων κ.λπ.). Οι μαθητές τα κατατάσσουν ως προς τον αριθμό αξόνων συμμετρίας και με βάση κριτήρια όπως: «το πολύ ένας άξονας …», «τουλάχιστον ένας…», «μόνον ένας…», «άρτιο και μη μηδενικό πλήθος αξόνων…», «περιττό πλήθος ..» κ.λπ.
3. Οι μαθητές σχεδιάζουν πολύγωνα με βάση τα παρακάτω κριτήρια. Αν δεν είναι δυνατόν να υπάρχει τέτοιο πολύγωνο, εξηγούν γιατί συμβαίνει αυτό.
   α) Τρίγωνο με ένα μόνον άξονα συμμετρίας
   β) Τρίγωνο με δύο μόνον άξονες συμμετρίας
   γ) Τετράπλευρο με ένα μόνον άξονα συμμετρίας και το οποίο δεν έχει κάποιο ζευγάρι απέναντι πλευρών παράλληλες
   δ) Τετράπλευρο με δύο μόνον άξονες συμμετρίας
   ε) Τετράπλευρο με τρεις τουλάχιστον άξονες συμμετρίας
   στ) Κυρτό πεντάγωνο με ένα μόνον άξονα συμμετρίας
   ζ) Μη κυρτό πεντάγωνο με ίσες πλευρές και ένα μόνον άξονα συμμετρίας
4. Τα δύο παρακάτω σχήματα είναι συμμετρικά ως προς άξονα.



   Εξηγήστε πώς θα σχεδιάζατε τον άξονα συμμετρίας με χρήση μόνο του κανόνα. Δικαιολογήστε γιατί ο τρόπος που θα προτείνετε θα δώσει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Γ΄ Γυμνασίου

Οι μαθητές αναλύουν και δικαιολογούν, με βάση τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, γνωστές κατασκευές από προηγούμενες τάξεις, όπως για παράδειγμα την κατασκευή διχοτόμου γωνίας ή την κατασκευή γωνίας ίσης με μία δοθείσα.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία και τα βιβλία καθηγητή.

Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου: http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html

- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b

Βασικά θέματα: Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας (Α΄ και Β΄ Γυμνασίου), μέτρηση επιφάνειας (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου), μέτρηση χωρητικότητας – όγκου (Γ΄Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η μέτρηση γενικά, είναι μία από τις διαδικασίες που έχουν μεγάλη πρακτική εφαρμογή σε καθημερινές καταστάσεις ενώ ταυτόχρονα παρέχει ευκαιρίες για την εκμάθηση και την εφαρμογή άλλων μαθηματικών γνώσεων. Η μέτρηση είναι δυνατόν να συμβάλει εκτός από την μελέτη της γεωμετρίας, με την οποία συνδέεται στενά, στη μελέτη των αριθμών, των συναρτήσεων, της στατιστικής και των πιθανοτήτων.

Στο Γυμνάσιο, η μέτρηση δεν περιορίζεται στην εξάσκηση χρήσης των οργάνων και μονάδων μέτρησης, αλλά συνδέεται με την προσπάθεια για μια περισσότερο θεωρητική ανάπτυξη της Γεωμετρίας. Οι συγκρίσεις και οι υπολογισμοί μηκών και γωνιών βασίζονται κυρίως στην χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων. Η μέτρηση επιφάνειας συνδέεται με τους μετασχηματισμούς που διατηρούν αναλλοίωτη την επιφάνεια και την αιτιολόγηση των τύπων του εμβαδού γνωστών σχημάτων. Ομοίως και η μέτρηση όγκου συνδέεται με τους τύπους υπολογισμού του όγκου γνωστών στερεών, την σχέση που έχουν μεταξύ τους κάποιοι απ' αυτούς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση.

Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας: Οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί από το Δημοτικό με άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις μηκών και γωνιών, με τη μέτρηση τους με μη τυπικές και τυπικές μονάδες καθώς και τη σχέση των μονάδων μέτρησης και τη χρήση οργάνων μέτρησης.

Στην Α΄ Γυμνασίου η μέτρηση μιας γωνίας με τη βοήθεια μοιρογνωμονίου συνδέεται με τη διαδικασία σύγκρισης των γωνιών μέσω της μετατροπής τους σε επίκεντρες στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους. Στην Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές εμπλέκονται με τη μέτρηση του κύκλου και των κυκλικών τόξων με δύο διαφορετικές μονάδες (μοίρες και μονάδες μήκους) και την ανάπτυξη και αιτιολόγηση των σχετικών τύπων.

Μέτρηση επιφάνειας, μέτρηση χωρητικότητας-όγκου: Στο Δημοτικό οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με τη μέτρηση της επιφάνειας σχημάτων και με τη σχέση των μονάδων μέτρησης επιφάνειας. Επίσης υπολογίζουν το εμβαδόν τετραγώνων, ορθογώνιων, παραλληλογράμμων, τριγώνων και τραπεζίων και προσεγγιστικά το εμβαδόν σχημάτων, υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων και διακρίνουν την έννοια της περιμέτρου από την έννοια του εμβαδού, και την έννοια της χωρητικότητας από την έννοια του όγκου (για παράδειγμα η χωρητικότητα μιας δεξαμενής πετρελαίου είναι διαφορετική από τον όγκο της γιατί στην πρώτη περίπτωση λαμβάνονται υπ’ όψιν οι εσωτερικές διαστάσεις της ενώ στην δεύτερη περίπτωση οι εξωτερικές διαστάσεις της).

Στην Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές εμπλέκονται με την αιτιολόγηση των τύπων του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου, καθώς και το εμβαδόν κυκλικού τομέα. Εδώ εντάσσεται και το Πυθαγόρειο θεώρημα με στόχο την ανάδειξη της σχέσης των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, αλλά και τη χρήση του στον υπολογισμό αποστάσεων και στον έλεγχο αν μία γωνία είναι ορθή.

Οι μαθητές στην Γ΄ Γυμνασίου εμπλέκονται με τη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων και σφαιρών.

Δυσκολίες των μαθητών: Η έννοια της μέτρησης (σύγκριση του μεγέθους που μετράμε με μία μονάδα που έχει το ίδιο χαρακτηριστικό, για παράδειγμα επιφάνεια με επιφάνεια), η εξοικείωση με την μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται, τα όργανα μέτρησης (βαθμολογημένος χάρακας, μετροταινία, μοιρογνωμόνιο κ.λπ.) ως εργαλεία με τα οποία κάνουμε συγκρίσεις και η χρήση τους, ο τρόπος μεταβολής του αποτελέσματος της μέτρησης όταν χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια ή υποδιαιρέσεις μιας μονάδας μέτρησης και η προσεγγιστική φύση της μέτρησης είναι στοιχεία που πρέπει να κατανοηθούν από τους μαθητές.

Αν και η μέτρηση μήκους είναι μία διαδικασία που φαντάζει σχετικά απλή, ενδέχεται να υπάρχουν μαθητές που να συναντούν δυσκολίες σε σχέση με αυτή. Συγκεκριμένα όταν μετρούν με χάρακα δεν αντιστοιχούν διαστήματα αλλά αντιστοιχούν σημεία.

Η μέτρηση γωνιών αποτελεί και αυτή συχνά πηγή δυσκολιών για τους μαθητές γιατί:

- συγκρίνουν γωνίες λαμβάνοντας υπ’ όψιν άλλα μεγέθη (τα μήκη των πλευρών ή την επιφάνεια που περικλείουν)
- δυσκολεύονται στην χρήση του μοιρογνωμονίου (χρήση της σωστής κλίμακας μέτρησης , αναγνώριση της μονάδας μέτρησης).

Επίσης η μέτρηση του τόξου αποτελεί πηγή δυσκολίας των μαθητών μια και είναι δύο τα χαρακτηριστικά που μετράμε: το μήκος του τόξου και το μέτρο του τόξου.

Ως προς την μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου θα πρέπει να αντιμετωπιστούν κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών, που θεωρούν ότι:

- βάση (ή βάσεις) στα σχήματα είναι μόνο αυτή (ή αυτές) που έχουν οριζόντιο προσανατολισμό και ύψος είναι μόνο αυτό που έχει κατακόρυφο προσανατολισμό ή μόνον αυτό που άγεται από κάποια κορυφή (στην περίπτωση των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων) και όχι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων.

- η μεταβολή κατά ανάλογο τρόπο των διαστάσεων ενός σχήματος (διπλασιασμός , τριπλασιασμός κ.λπ. όλων των πλευρών) επιφέρει ανάλογη μεταβολή στο εμβαδό των σχημάτων
- σχήματα με μεγαλύτερη περίμετρο έχουν μεγαλύτερο εμβαδό
- αν αλλάξει το σχήμα, αλλάζει και η επιφάνεια πχ. δύο διαφορετικά τρίγωνα με την ίδια βάση και ίσα ύψη
- η μεταβολή κατ' ανάλογο τρόπο των διαστάσεων ενός στερεού επιφέρει ανάλογη μεταβολή στον όγκο των σχημάτων
- στερεά με μεγαλύτερη επιφάνεια έχουν και μεγαλύτερο όγκο
- στερεά με ίσο όγκο έχουν και ίση επιφάνεια

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν ότι η μέτρηση μιας γωνίας με τη χρήση μοιρογνωμονίου αποτελεί εφαρμογή της μεθόδου σύγκρισης των γωνιών μέσω της μετατροπής τους σε επίκεντρες. Το μοιρογνωμόνιο είναι ένα βαθμονομημένο ημικύκλιο, το κέντρο του οποίου τοποθετείται στην κορυφή της προς μέτρηση γωνίας, η οποία έτσι καθίσταται επίκεντρη και βαίνει σε ένα τόξο γνωστού μέτρου.

Για το μήκος του τόξου και το εμβαδόν κυκλικού τομέα προτείνεται να ακολουθήσουν οι μαθητές την αναλογική συλλογιστική και μετά να προσπαθήσουν να εξάγουν τους αντίστοιχους τύπους. Για παράδειγμα τόξο μέτρου 45° θα έχει μήκος ίσο με το $\frac{1}{8}$ του μήκους του κύκλου στον οποίο ανήκει, γιατί $\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$ κ.λπ.

Ο στόχος στο Γυμνάσιο, για τη μέτρηση της επιφάνειας, είναι αρχικά μια ανακεφαλαίωση των γνωστών τύπων από το δημοτικό για το εμβαδόν του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλόγραμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Βασική επιδίωξη παραμένει όμως η αιτιολόγηση των τύπων εμβαδού για τα παραπάνω σχήματα καθώς και του κύκλου. Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμο να αξιοποιηθούν οι προτεινόμενες στο Π.Σ. δραστηριότητες καθώς και η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ώστε μέσα από συζητήσεις, να καταλήξουν οι ίδιοι οι μαθητές στις αιτιολογήσεις.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα, εκτός από τις άμεσες εφαρμογές, προσφέρεται ιδιαίτερα για δραστηριότητες που εισάγουν μια ιστορική προοπτική στη διδασκαλία των Μαθηματικών και αναδεικνύουν τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας (γεωμετρικά εμβαδά, αλγεβρική σχέση).

Σχετικά με τη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου των γεωμετρικών στερεών, βασικοί στόχοι της διδασκαλίας είναι η αιτιολόγηση των σχετικών τύπων για το πρίσμα, την πυραμίδα, τον κύλινδρο και τον κώνο καθώς και η χρήση τους, όπως και η χρήση των τύπων για την σφαίρα, στην επίλυση προβλημάτων. Παράλληλα, επιδιώκεται η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών για οπτικοποιημένη σκέψη (βλ. ΠΣ) μέσω της χρήσης πραγματικών αντικειμένων ή γεωμετρικών μοντέλων και των αναπτυγμάτων τους. Η ορθή χρήση των τύπων για την μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου των στερεών συνδέεται στενά με την ικανότητα των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό, γεγονός που μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά με διάφορους τρόπους.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

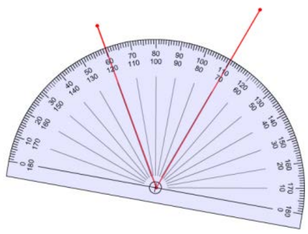
Α΄ Γυμνασίου: Μέτρηση γωνίας (ΠΜΑ: Μ1)

Ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές, που είναι χωρισμένοι σε ομάδες, προσχεδιασμένες γωνίες και ζητά από αυτούς να τις χαρακτηρίσουν ως κυρτές – μη κυρτές και αμβλείες, ορθές ή οξείες (στην περίπτωση των μη κυρτών). Στην αρχή οι μαθητές μετρούν τη γωνία με το μοιρογνωμόνιο με τον συνήθη τρόπο. Κατόπιν τους ζητά να βρουν τρόπο ή τρόπους να τις μετρήσουν με το μοιρογνωμόνιο, χωρίς όμως να ακολουθήσουν την τυπική διαδικασία ταύτισης μιας πλευράς της γωνίας με την διάμετρο του ημικυκλίου του μοιρογνωμονίου, όπως δείχνουν οι εικόνες 25 και 26.
Οι μαθητές θα πρέπει να περιγράψουν τις στρατηγικές που ακολούθησαν και να συζητήσουν διάφορα χαρακτηριστικά των μεθόδων που βρήκαν.

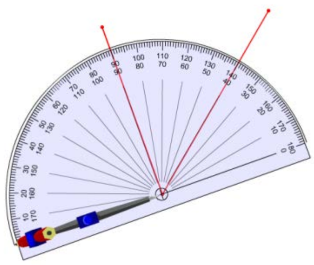
Είναι σημαντικό οι μαθητές πριν κάνουν μία μέτρηση γωνίας να την ταξινομούν ως προς το είδος και μέσω της ταξινόμησης να κάνουν έλεγχο της μέτρησης

Η γνώση του μέτρου της γωνίας ενδέχεται να τους βοηθήσει στην αναζήτηση των διαφορετικών μεθόδων μέτρησης.

Διεργασία επικοινωνίας



Εικόνα 25



Εικόνα 26

Αναμένεται ότι οι μαθητές θα ανακαλύψουν ότι η μέτρηση μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους ανεξάρτητα από την τοποθέτηση του μοιρογνωμονίου, αρκεί το κέντρο του να είναι στην κορυφή της γωνίας και να βρίσκουν την διαφορά των ενδείξεων της ίδιας κλίμακας. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός, με κατάλληλες ερωτήσεις, βοηθά τους μαθητές να κάνουν τη σύνδεση με τη σχέση της επίκεντρης γωνίας και του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει αυτή, την ανεξαρτησία του μέτρου του τόξου από την ακτίνα των ημικυκλίων των μοιρογνωμονίων και τον χωρισμό των τόξων σε ίσα μέρη από τα εξωτερικά σημάδια - ενδείξεις του μοιρογνωμονίου και αντίστοιχα των γωνιών.

Η σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου μπορεί να έχει προηγηθεί κατά την διδασκαλία ή να προκύψει από την δραστηριότητα.

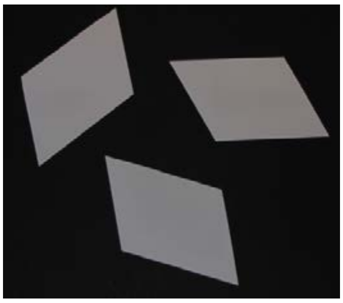
Β΄ Γυμνασίου: ΜΔ1 (ΠΜΑ: Μ2)

Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε ομάδα 2-3 ίσα μη ορθογώνια παραλληλόγραμμα από χαρτί (εικόνα 26). Προσπαθούν να βρουν τρόπο ή τρόπους να κόψουν με ψαλίδι τα παραλληλόγραμμα και να τα μετασχηματίσουν σε ισοδύναμα ορθογώνια. Η συνειδητοποίηση εκ μέρους των μαθητών ότι η δημιουργία ορθογωνίου απαιτεί την ύπαρξη ορθών

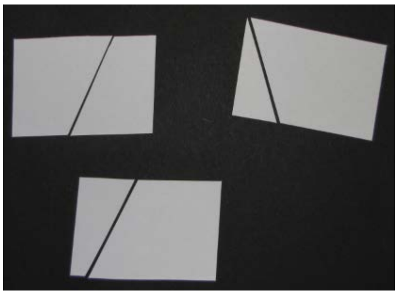
Το μέσο (χαρτί) είναι

γωνιών ενδέχεται να τους οδηγήσει στην χάραξη της κάθετης προς ένα ζεύγος απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου και τον χωρισμό του σε δύο μέρη με την βοήθεια του ψαλιδιού.

τέτοιο που θα βοηθήσει τους μαθητές να το χειριστούν άμεσα και να δημιουργήσουν το ορθογώνιο, αφήνοντας όμως αμφιβολίες για το τελικό αποτέλεσμα (εικόνα 27) και άρα την ανάγκη αιτιολόγησης



Εικόνα 26



Εικόνα 27

Κατόπιν οι ομάδες καταγράφουν σε ένα χαρτί την διαδικασία που ακολούθησαν, σχεδιάζοντας κατάλληλα σχήματα και χρησιμοποιώντας γεωμετρική ορολογία προσπαθούν να αιτιολογήσουν τα βήματα της διαδικασίας, με βάση τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και των μετασχηματισμών που έκαναν. Για παράδειγμα, δικαιολογούν γιατί ταιριάζουν οι πλευρές των δύο σχημάτων ή γιατί η κάτω βάση είναι ευθύγραμμο τμήμα και όχι τεθλασμένη γραμμή κ.λπ.

Διεργασία επικοινωνίας

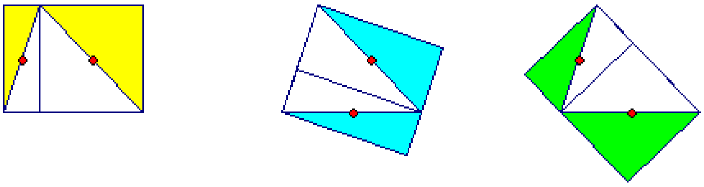
Διεργασία διερεύνησης και επιχειρηματολογίας

Συζητούν με το σύνολο της τάξης τους τρόπους που ακολούθησαν, αν έχει σημασία ή όχι το σημείο στο οποίο σχεδίασαν την κάθετη και γιατί, αν έχει σημασία ή όχι ποια πλευρά του παραλληλογράμμου ονομάζουν βάση, αν μπορεί η μέθοδος να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο και τι συμπεράσματα βγάζουν σχετικά με τις επιφάνειες των δύο σχημάτων και το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

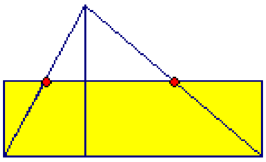
Υπέρβαση πρωτοτυπικών αναπαραστάσεων

Η διερεύνηση μπορεί να γίνει επικουρικά με τη χρήση λογισμικού (αρχείο: Β Γυμ - ΜΔ1 - Εμβαδόν παραλληλογράμμου.ggb). Οι μαθητές μεταφέρουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο μετασχηματίζοντας ένα παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο. Η προστιθέμενη αξία χρήσης του λογισμικού βρίσκεται στην δυνατότητα δυναμικής μεταβολής του σχήματος του παραλληλογράμμου, από τους μαθητές και στην ευκολότερη δυνατότητα αναγνώρισης ότι ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ισχύει σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο.

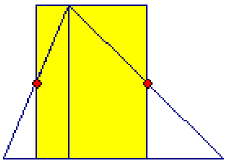
Με παραπλήσιο τρόπο δουλεύουν στον μετασχηματισμό ενός τριγώνου σε ορθογώνιο (εικόνα 28) ή σε ισοδύναμο ορθογώνιο (εικόνες 29 και 30). Η αιτιολόγηση στην εικόνα 30 ότι η βάση είναι η μισή από την βάση του τριγώνου δεν είναι μέσα στις δυνατότητες, από άποψη γνώσεων, των μαθητών, όμως μπορεί να γίνει μέσω του τύπου του εμβαδού τριγώνου, που θα έχει αιτιολογηθεί με κάποιον άλλο τρόπο.



Εικόνα 28

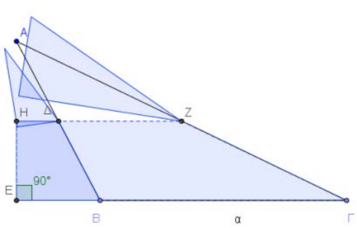


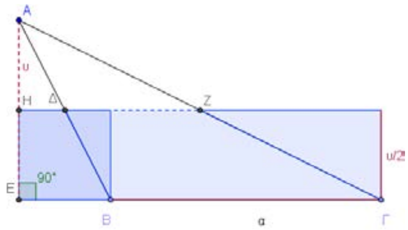
Εικόνα 29



Εικόνα 30

Η διερεύνηση της περίπτωσης της εικόνας 29, μπορεί να γίνει και με την βοήθεια λογισμικού (αρχείο: Β Γυμ-ΜΔ1-Εμβαδόν τριγώνου.ggb), γιατί θα επιτρέψει στους μαθητές να πειραματιστούν με ένα πλήθος τριγώνων και κυρίως να εξετάσουν και να αιτιολογήσουν την περίπτωση των αμβλυγωνίων.





Β΄ Γυμνασίου: Εμβαδό και Περίμετρος (ΠΜΑ: Μ2, Μ3)

Οι μαθητές χρησιμοποιούν χαρτί με διάστικτους καμβάδες που το έχουν χωρίσει σε περιοχές 5 Χ 5 σημείων. Σχεδιάζουν όσο το δυνατόν περισσότερα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές είναι σημεία του καμβά, εμβαδού 1 τ.μ., τα οποία να μην είναι ίσα μεταξύ τους και δικαιολογούν γιατί τα τρίγωνα που σχεδίασαν ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος (οι αιτιολογήσεις τους για την διαφορετικότητα των τριγώνων μπορούν να βασίζονται στους μετασχηματισμούς των σχημάτων, που τους είναι γνωστοί από το Δημοτικό).

Ο διάστικτος καμβάς επιτρέπει στους μαθητές να δουλέψουν με πολλούς και ποικίλους τρόπους.

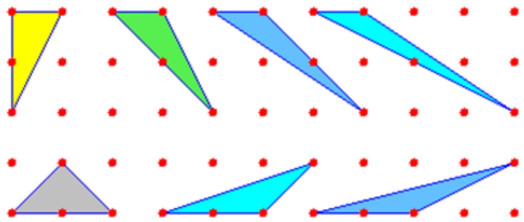
Αναζητούν ανάμεσα στα τρίγωνα αυτό που έχει την μικρότερη και την μεγαλύτερη περίμετρο και δικαιολογούν την επιλογή τους. Συζητούν για τις μεθόδους που ακολούθησαν για να προσδιορίσουν όλα τα τρίγωνα , αν θα μπορούσε η μέθοδός τους να επεκταθεί σε έναν μεγαλύτερο καμβά και τι θα συνέβαινε τότε με την περίμετρο και το εμβαδό των τριγώνων. Επίσης συζητούν για το που θα κινείται η τρίτη κορυφή του τριγώνου (χωρίς τους περιορισμούς να είναι σημείο του καμβά ή τα τρίγωνα να είναι διαφορετικά), όταν τα τρίγωνα τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν κοινή βάση. Με τη βοήθεια του Sketchpad (αρχείο: Β Γυμ - Εμβαδόν - περίμετρος τριγώνου.gsp) διερευνούν το τι αλλάζει και τι δεν αλλάζει σε ένα τρίγωνο όταν η μία κορυφή του κινείται σε ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά του τριγώνου.

Διεργασίες

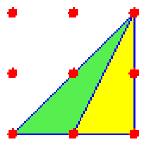
Με αφορμή τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα τους γενικεύουν για τρίγωνα που έχουν κοινή βάση (ή ίσες βάσεις) και η τρίτη κορυφή κινείται σε ευθεία παράλληλη προς την βάση.

διερεύνησης , επιχειρηματολογίας και γενίκευσης

Επίσης με κατάλληλη τοποθέτηση των τριγώνων, κατά τη σύγκριση των περιμέτρων (εικόνα 32) και αντίστοιχες διερευνήσεις, μπορούν να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τον χωρισμό ενός τρίγωνου σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα από την διάμεσο.



Εικόνα 31



Εικόνα 32

Σχετικό είναι και το υλικό που υπάρχει στην συνθετική εργασία 7 του ΠΣ: «Παράδοξες ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων».

Β΄ Γυμνασίου: Μήκος κύκλου (ΠΜΑ: Μ1)

Χρησιμοποιώντας το Geogebra οι μαθητές εργάζονται με την προσομοίωση μιας κατάστασης (ξετύλιγμα κουβαρίστρας) και διερευνούν τη σχέση της διαμέτρου του κύκλου και του μήκους του. Στο λογιστικό φύλλο υπολογίζεται αυτόματα ο λόγος (μήκος κύκλου)/(διάμετρος κύκλου) και οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν προσεγγιστικά τον αριθμό π. Χρησιμοποιώντας περισσότερα δεκαδικά ψηφία στις μετρήσεις μπορούν να υπολογίσουν ένα μεγάλο αριθμό ψηφίων του π. Είναι μία δραστηριότητα που δύσκολα μπορεί να γίνει με χειραπτικά μέσα και υλικά λόγω των σημαντικών σφαλμάτων στις μετρήσεις.

Β-Γυμ-Μ1-Σχέση περιφέρειας-διαμέτρου κύκλου.ggb

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και γενίκευση

Γ΄ Γυμνασίου: Παραλλαγή της ΜΔ1 (ΠΜΑ: Μ2)

Οι μαθητές, χωρισμένοι σε ομάδες κατασκευάζουν από χαρτόνι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ένα ορθό τριγωνικό πρίσμα, που έχουν ίσες επιφάνειες βάσης και ίσα ύψη (η κάθε ομάδα δημιουργεί τα στερεά με διαφορετικά χαρακτηριστικά από αυτά των άλλων ομάδων). Τα γεμίζουν με ένα ρευστό υλικό (άμμος, ρύζι κ.λπ.) και συγκρίνουν τις χωρητικότητες των δύο στερεών. Συζητούν για τα αποτελέσματα της σύγκρισης και γενικεύουν. Επίσης κατασκευάζουν πυραμίδα που έχει το ίδιο εμβαδό βάσης και ίσο ύψος με τα προηγούμενα, την γεμίζουν με το ίδιο υλικό και συγκρίνουν πάλι την χωρητικότητά της με αυτή των προηγουμένων, αδειάζοντας κάθε φορά το περιεχόμενό της π.χ. στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μέχρι να γεμίσει αυτό. Συζητούν πάλι για τα αποτελέσματα και γενικεύουν.

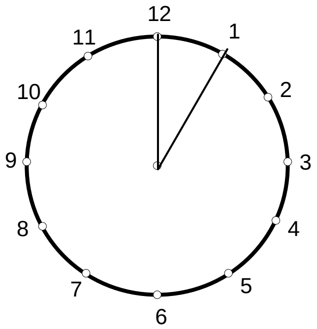
Διεργασίες διερεύνησης , επικοινωνίας και γενίκευσης

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

Β΄ Γυμνασίου:

1. **Πυθαγόρειο θεώρημα (ΠΜΑ: Μ3)**
   Οι μαθητές σχεδιάζουν και υπολογίζουν όλα τα δυνατά διαφορετικά (ως προς το μήκος) τμήματα σε διάστικτο χαρτί 5 Χ 5.

2. **Μήκος τόξου - Εμβαδό κυκλικού τομέα (ΠΜΑ: Μ1, Μ4)**
   Οι μαθητές χρησιμοποιούν κύκλους χωρισμένους σε ίσα τόξα (υλικό: http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=6676&part=index) ή τους φτιάχνουν οι ίδιοι και υπολογίζουν τα μήκη των τόξων και τα εμβαδά διαφόρων κυκλικών τομέων με βάση την αναλογική συλλογιστική. Για παράδειγμα το μήκος του μικρού τόξου (Εικόνα 33) είναι το $\frac{1}{12}$ του μήκους του κύκλου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα είναι το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δίσκου, γιατί ο κύκλος είναι χωρισμένος σε 12 ίσα τόξα και ο κυκλικός δίσκος μπορεί να χωρισθεί σε 12 ίσους κυκλικούς τομείς. Συζητούν τις μεθόδους που ακολούθησαν και γενικεύουν για τόξα και κυκλικούς τομείς μ° ως μέρη των 360° ακολουθώντας την αναλογική συλλογιστική. Για παράδειγμα τόξο μέτρου 20° είναι $\frac{20°}{360°} = \frac{1}{18}$ του τόξου των 360° και θα έχει μήκος ίσο με το $\frac{1}{18}$ του μήκους του κύκλου κ.λπ.



Εικόνα 33

Γ΄ Γυμνασίου: Επιφάνεια και όγκος κυλίνδρου (ΠΜΑ: Μ1, Μ2)

Οι μαθητές χρησιμοποιούν δύο φύλλα χαρτί Α4. Το ένα το διπλώνουν κατά μήκος και το άλλο κατά πλάτος για να σχηματίσουν δύο κυλίνδρους (χωρίς τις βάσεις). Διερευνούν σε ποια περίπτωση ο όγκος είναι μεγαλύτερος και δικαιολογούν σχετικά. Συζητούν για τα χαρακτηριστικά των δύο κυλίνδρων (ίσες παράπλευρες επιφάνειες – διαφορετικοί όγκοι).

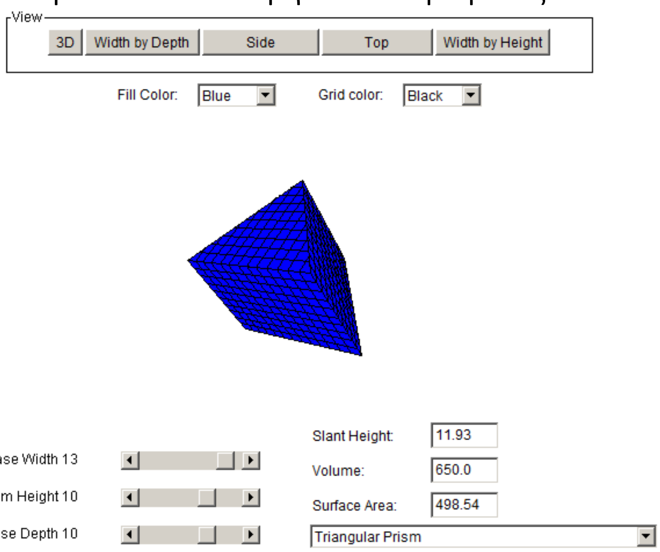
Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία και τα βιβλία καθηγητή.

Για την μέτρηση μήκους – μέτρηση γωνίας: Από το βιβλίο μαθητή της Α΄ Γυμνασίου (μέρος Β) §1.3 - §1.5, §1.12 και από το βιβλίο μαθητή της Β΄ Γυμνασίου §3.3, §3.4.

Για την μέτρηση επιφάνειας και του όγκου: Από το βιβλίο μαθητή της Β΄ Γυμνασίου (μέρος Β) κεφ. 1, §3.5, §3.6, κεφ. 4.

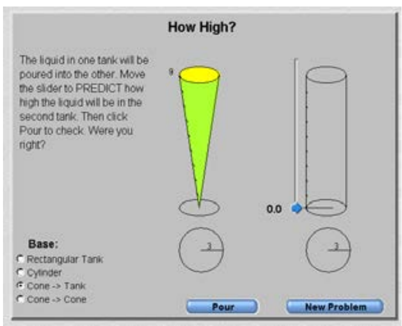
Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου: http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html
- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b
- Δραστηριότητα σε σχέση με το εμβαδό και τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και τριγωνικού πρίσματος:



http://www.shodor.org/interactivate/activities/SurfaceAreaAndVolume/

- Δραστηριότητα σε σχέση με την διατήρηση του όγκου:



http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_275_g_4_t_4.html?from=category_g_4_t_4.html

- Εκπαιδευτικό πακέτο, με κεντρικό άξονα το γνωστικό περιεχόμενο των μετρήσεων:

http://www.e-yliko.gr/Lists/List40/DispForm.aspx?ID=171&Source=http%3A%2F%2Fwww.e-yliko.gr%2Fresource%2Fsupportmaterial%2FEduPackets.aspx%3FSortField%3D_x039b__x03bf__x03b3__x03cc__x03%26SortDir%3DAsc%26View%3D%257B3F688614-9DA9-42F6-9AF2-35E2A0C36FC9%257D

Βασικά θέματα: Τριγωνομετρία (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Η τριγωνομετρία είναι ένα κομμάτι των μαθηματικών που συνδέει τη γεωμετρία, τη μέτρηση και την άλγεβρα. Χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων τα οποία μπορεί να προέρχονται από τα μαθηματικά, άλλες επιστήμες ή από την καθημερινή ζωή. Συνδέεται αρχικά με την έννοια της ομοιότητας ορθογωνίων τριγώνων, με τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας, αλλά και με την κλίση μιας ευθείας. Οι νόμοι των ημιτόνων και των συνημιτόνων αναδεικνύουν τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των πλευρών και των γωνιών οποιωνδήποτε τριγώνων. Σημαντικές είναι οι πρακτικές εφαρμογές της τριγωνομετρίας όπως είναι η μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων, ο υπολογισμός γωνιών, όπως η γωνία που σχηματίζει ο Ήλιος σε σχέση με τον ορίζοντα και ο υπολογισμός της κλίσης ενός δρόμου, μιας ράμπας, μιας σκάλας κ.λπ.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Πτυχές του λόγου, της αναλογίας και της ομοιότητας, είναι οικείες στους μαθητές από προηγούμενες τάξεις , αλλά και από την καθημερινή ζωή. Στην Β΄ τάξη οι μαθητές θα ασχοληθούν με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και την επίλυση ορθογωνίων τριγώνων ενώ στην Γ΄ τάξη με την επέκταση του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών σε αμβλείες γωνίες, με τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες QuickTime™ and a decompressor are needed to see this picture. καθώς και με τους νόμους των ημιτόνων και των συνημιτόνων. Στο Λύκειο οι μαθητές θα γνωρίσουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν το λόγο δύο τμημάτων ως ένα αριθμό κι ακόμα περισσότερο να συνδέσουν το λόγο με το μέτρο της γωνίας. Ακόμη μία από τις βασικές δυσκολίες των μαθητών μπορεί να σχετίζεται με την αναγνώριση ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εξαρτώντα αποκλειστικά από τη γωνία και όχι από το συγκεκριμένο τρίγωνο. Επίσης η ερμηνεία του ίδιου του λόγου μπορεί να αποτελεί εμπόδιο. Για παράδειγμα, ο λόγος $\frac{AB}{AG}=\frac{1}{2}$ ερμηνεύεται από μαθητές αποκλειστικά ως AB=1 μονάδα μήκους και AG=2 μονάδες μήκους. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές ενδέχεται να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την ορθή γωνία και την υποτείνουσα όταν το ορθογώνιο τρίγωνο δεν έχει τον συνηθισμένο γι' αυτούς προσανατολισμό. Είναι όμως σημαντικό να αναγνωρίζουν αυτά τα στοιχεία ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του σχήματος.

Προτάσεις για την διδακτική διαχείριση: Η απλή αναφορά στον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών δεν επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν τη σύνδεση του λόγου δύο πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με το μέτρο μιας γωνίας του. Για το λόγο αυτό προτείνεται να διερευνήσουν τη σχέση των γωνιών και των λόγων των πλευρών σε πολλά όμοια ορθογώνια τρίγωνα, με στόχο να αναδειχθεί η σύνδεση του μέτρου των γωνιών με τους λόγους των πλευρών. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί συνδέονται με την ανάγκη να περιγραφούν αυτοί οι λόγοι. Η ομοιότητα των τριγώνων δεν αποτελεί στόχο του ΠΣ για την Β΄ Γυμνασίου. Γι' αυτό χρειάζεται να γίνει μια διαισθητική προσέγγιση της ανεξαρτησίας των τριγωνομετρικών αριθμών από ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο τρίγωνο.

Ενδέχεται να συμβάλλουν στην κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών της τριγωνομετρίας:

- Η σχεδίαση με διαφορετικά μέσα και μεθόδους (διάστικτοι ή τετραγωνικοί καμβάδες, με κανόνα και διαβήτη, με μέτρηση ή σε ψηφιακό περιβάλλον) ενός πλήθους ορθογωνίων τριγώνων με δεδομένο έναν τριγωνομετρικό αριθμό μιας γωνίας του (π.χ. εφω=2/3).
- Ο υπολογισμός πλευρών και των τριγωνομετρικών αριθμών των οξειών γωνιών των τριγώνων της προηγούμενης περίπτωσης καθώς και ο υπολογισμός των γωνιών του τριγώνου, με την χρήση πινάκων.

Για την Γ΄ Γυμνασίου η επέκταση των τριγωνομετρικών αριθμών σε αμβλείες γωνίες μπορεί να ξεκινήσει με τη σύνδεση της έννοιας της αρνητικής κλίσης μιας ευθείας (π.χ. της y=-2x) και της εφαπτομένης της γωνίας της ευθείας με τον άξονα x΄x. Έτσι μπορεί να γίνει επέκταση του ορισμού της εφαπτομένης σε αμβλείες γωνίες και να αναδειχθεί η σχέση για τις εφαπτόμενες των παραπληρωματικών γωνιών. Στη συνέχεια, η επέκταση του ορισμού των άλλων τριγωνομετρικών αριθμών για αμβλείες γωνίες, μπορεί να γίνει μέσω των σχέσεων ημ(180°- θ) = ημθ και συν(180°-θ) = -συνθ και να ακολουθήσουν οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Είναι σημαντικό οι μαθητές να μην αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά μόνο ως ένα σύνολο αφηρημένων εννοιών, αλλά και ως ιδέες που μπορούν να έχουν εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο και μάλιστα σε καταστάσεις που δεν είναι τόσο απλές, όπως η μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων. Γι' αυτό προτείνεται οι μαθητές να εμπλακούν με τη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, που σχετίζονται με υπολογισμούς απρόσιτων αποστάσεων και με την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων, τόσο στην Β΄ όσο και στην Γ΄ τάξη.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

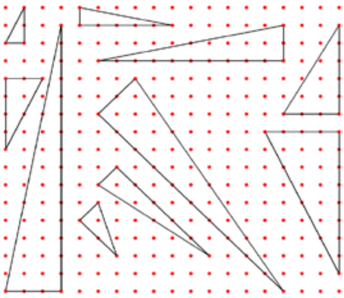
Β΄ Γυμνασίου: (Εναλλακτική της ΜΔ5 του ΠΣ. ΠΜΑ: Μ3, Μ6, Μ8)

Ο διδάσκων έχει προσχεδιάσει δύο κατηγορίες όμοιων τρίγωνων σε χαρτί από διάστικτο καμβά στον οποίο οι κουκίδες έχουν απόσταση 1cm, όπως για παράδειγμα στην εικόνα 34, που είναι σχεδιασμένα τρίγωνα με λόγους κάθετων πλευρών 1:2 και 1:5. Οι μαθητές δουλεύουν ανά ομάδες με ένα αντίγραφο ανά ομάδα και επιπλέον με έτοιμα κομμένα τα τρίγωνα από άλλο αντίγραφο του σχεδίου, ώστε να μπορούν να επιθέτουν το ένα τρίγωνο πάνω στο άλλο για

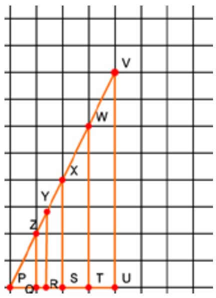
Τέτοιο χαρτί, όπως και με τετραγωνικό καμβά, που θα χρειαστεί στην συνέχεια, μπορούμε να δημιουργήσουμε με την εφαρμογή που υπάρχει στην παρακάτω διεύθυνση:

να συγκρίνουν γωνίες και να μην κάνουν χρήση του μοιρογνωμονίου που πιθανόν θα τους οδηγήσει σε μη αναμενόμενα αποτελέσματα. Ο διδάσκων ζητάει να χωρίσουν τα τρίγωνα σε δύο μόνο κατηγορίες έτσι ώστε τα τρίγωνα κάθε κατηγορίας να έχουν κοινά χαρακτηριστικά και να αιτιολογήσουν τα κριτήρια της επιλογής τους. Αναμένεται ότι κάποιες ομάδες μαθητών θα ανακαλύψουν την ισότητα των γωνιών της κάθε κατηγορίας τριγώνων και θα την χρησιμοποιήσουν ως κριτήριο. Ίσως κάποιες άλλες ομάδες παρατηρήσουν σχέσεις ανάμεσα στις πλευρές της κάθε κατηγορίας, όμως ενδέχεται να υπάρξουν και μαθητές ή ομάδες μαθητών που θα χρησιμοποιήσουν ως κριτήριο το ότι κάποια τρίγωνα «φαίνονται πιο μακρόστενα σε σχέση με τα άλλα» ή κάτι σχετικό.

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=205



Εικόνα 34



Εικόνα 35

Ερωτήσεις σχετικά με τη διευκρίνιση του όρου μακρόστενα ίσως στρέψουν την προσοχή των μαθητών σε σχέσεις μεταξύ των πλευρών. Η τάξη μέσα από συζήτηση και με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού καταλήγει να κατηγοριοποιήσει τα τρίγωνα με κριτήριο τις γωνίες. Ζητείται από τις μισές ομάδες των μαθητών να δουλέψουν με τα τρίγωνα της μιας κατηγορίας και οι άλλες μισές με τα τρίγωνα της άλλης. Οι μαθητές σχεδιάζουν τα τρίγωνα σε χαρτί με τετράγωνο καμβά 1cm, με κοινή κορυφή την κάτω αριστερή άκρη του καμβά και με κοινή οξεία γωνία, όπως στην εικόνα 35.

Συζητούν και καταγράφουν το τι παρατηρούν. Επίσης υπολογίζουν και καταγράφουν σε πίνακα τα μήκη των κάθετων πλευρών των τριγώνων και συσχετίζουν τις καταγραφές στον πίνακα με τις συντεταγμένες των σημείων της εικόνας 35. Αναμένεται ότι οι μαθητές της κάθε ομάδας θα αναγνωρίσουν ότι ο λόγος των κάθετων πλευρών είναι σταθερός , ενώ θα είναι διαφορετική η τιμή του για την κάθε κατηγορία. Οι μαθητές συνοψίζουν τα συμπεράσματα και ο διδάσκων εισάγει τον όρο εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου για να εκφράσει τον λόγο μεταξύ των κάθετων πλευρών του ίδιου τριγώνου (απέναντι κάθετη πλευρά/προσκείμενη κάθετη πλευρά) και ζητάει από τους μαθητές να σχεδιάσουν και άλλα ορθογώνια τρίγωνα με τον ίδιο λόγο κάθετων πλευρών και να εξηγήσουν την στρατηγική τους. Σε επόμενη φάση τους ζητάει να κάνουν αντίστοιχη διερεύνηση για τις κάθετες πλευρές του τριγώνου και την υποτείνουσα.

Δημιουργία συνδέσεων με άλλες μαθηματικές περιοχές

Β΄ Γυμνασίου: ΠΜΑ: Μ6, Μ7

Χρησιμοποιώντας το αρχείο του Geogebra οι μαθητές μπορούν να εργαστούν με την προσομοίωση ενός πραγματικού προβλήματος υπολογισμού του ύψους ενός δένδρου γνωρίζοντας τη σκιά του και αντίστροφα. Μπορούν να μεταβάλλουν τη θέση του ήλιου και να αλλάζουν το μήκος της σκιάς του ή το ύψος του δέντρου. Έτσι μπορούν να νοηματοδοτήσουν τη χρήση των τριγωνομετρικών αριθμών για τον υπολογισμό μηκών σε συγκεκριμένα πλαίσια έχοντας παράλληλα τη δυνατότητα να αλλάζουν τα εμπλεκόμενα γεωμετρικά μεγέθη.

Αρχείο λογισμικού: Β Γυμ-Τριγ-Ύψος και σκιά.ggb

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και επίλυση προβλημάτων

Β΄ Γυμνασίου ΠΜΑ:Μ6-Μ7

Με τη βοήθεια του Geogebra οι μαθητές μπορούν να μεταβάλλουν τις πλευρές ενός ορθογωνίου στο οποίο εμφανίζονται οι πλευρές και οι γωνίες του. Μαθαίνουν τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών και τους υπολογίζουν σε συγκεκριμένα ορθογώνια τρίγωνα. Ανατροφοδοτούν τις απόψεις τους με τη χρήση των βοηθειών του λογισμικού. Ανακαλύπτουν ότι οι εφαπτόμενες συμπληρωματικών γωνιών είναι αντίστροφοι αριθμοί και ότι το ημίτονο μιας γωνίας ισούται με το συνημίτονο της συμπληρωματικής της και αντιστρόφως.

Αρχείο λογισμικού: Β Γυμ-Μ6,Μ7-Τριγωνομετρικοί αριθμοί.ggb

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και γενίκευση

Β΄ Γυμνασίου ΠΜΑ: Μ6, Μ7

Με τη βοήθεια του Geogebra οι μαθητές μπορούν να μεταβάλλουν τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και με τη χρήση ενός δρομέα να σχηματίζουν ορθογώνια τρίγωνα με ίδια μέτρα γωνιών. Οι μαθητές θα ανακαλύψουν ότι οι τριγωνομετρικοί

Αρχείο λογισμικού: Β Γυμ-Πλευρές ορθ τριγ και τριγ αριθμοί.ggb

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για

αριθμοί εξαρτώνται μόνο από τη γωνία και όχι από τα μήκη των πλευρών του.

διερεύνηση και γενίκευση

Β΄ Γυμνασίου: Φωτογραφία κεκλιμένου δρόμου (ΠΜΑ: Μ6, Μ8)

Με βάση μια φωτογραφία οι μαθητές χαράσσουν γραμμές, μετρούν μήκη πάνω σε αντίγραφο της φωτογραφίας και κάνουν υπολογισμούς για να προσδιορίσουν προσεγγιστικά την κλίση του δρόμου. Μοντελοποιούν την κατάσταση για να βρουν το ύψος που κερδίζει ένας πεζός που ανεβαίνει την ανηφόρα για κάθε μέτρο που διανύει πάνω σ' αυτήν.

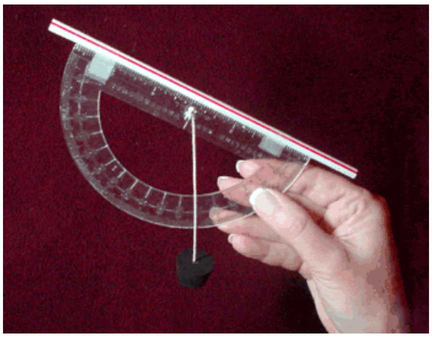
Συνοδευτικό αρχείο εργασίας: Β' Γυμν-Τριγωνομετρία-Φωτογραφία κεκλιμένου δρόμου (ΠΜΑ Μ6, Μ8).doc

Διεργασία μοντελοποίησης

Β΄ Γυμνασίου: Μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων (ΠΜΑ: Μ8, Σ8)

Με απλά υλικά όπως ένα καλαμάκι, ένα μοιρογνωμόνιο, σκοινί, ένα βαρίδι και λίγη κολλητική ταινία οι μαθητές κατασκευάζουν ένα όργανο μέτρησης γωνιών - κλίσεων, όπως αυτό της διπλανής εικόνας. Αφού εξοικειωθούν με την χρήση του και εξηγήσουν τον τρόπο λειτουργίας του προσπαθούν να βρουν τρόπο να υπολογίσουν το ύψος ενός κτιρίου π.χ. του σχολείου τους. Εργαζόμενοι σε ομάδες μελετούν το πρόβλημα με στόχο να καταλήξουν στη μέτρηση της απόστασης της θέσης ενός παρατηρητή από τη βάση του κτιρίου και στη μέτρηση της γωνίας ύψους του κτιρίου από την θέση του παρατηρητή ή σε κάποια άλλη μέθοδο. Μοντελοποιούν την κατάσταση και με τη χρήση των τριγωνομετρικών αριθμών υπολογίζουν το ύψος του κτιρίου. Συγκρίνουν τις μεθόδους και τα αποτελέσματα της κάθε ομάδας.

Όταν ανυψώνουν το μοιρογνωμόνιο για να στοχεύσουν μέσα από το καλαμάκι το άκρο ενός ψηλού αντικειμένου, η γωνία ανύψωσης είναι η συμπληρωματική της οξείας γωνίας που δείχνει το σκοινί με το βαρίδι



Τα πιθανόν διαφορετικά αποτελέσματα του ύψους του κτιρίου από τις διαφορετικές ομάδες των μαθητών μπορεί να αποτελέσουν μία αφορμή προς συζήτηση για την προσεγγιστική φύση της μέτρησης και τη σύνδεση με έννοιες της στατιστικής, όπως για παράδειγμα ποιος αριθμός θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει το ύψος του κτιρίου π.χ. η διάμεσος ή μέση τιμή των μετρήσεων.

Επιλογή και χρήση εργαλείων

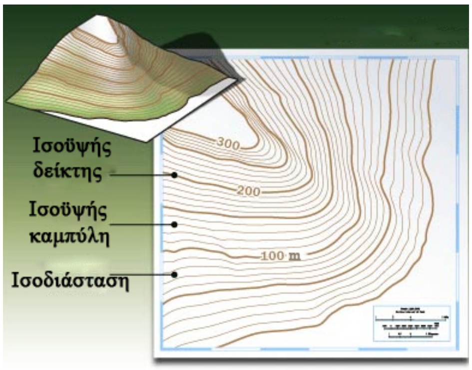
Διεργασία μοντελοποίησης

Διεργασία επικοινωνίας

Δημιουργία συνδέσεων με άλλες μαθηματικές περιοχές

Β΄ Γυμνασίου: Πεζοπορία στο βουνό (ΠΜΑ: Μ6, Μ8)

Αρχικά γίνεται μία αναφορά από τον διδάσκοντα για τους χάρτες (τοπογραφικοί, πεζοπορικοί κ.λπ.) που παρουσιάζουν ισοϋψείς καμπύλες (contour lines) και πώς σχετίζονται αυτές με το ύψος διαφόρων σημείων μιας περιοχής και το ανάγλυφο της περιοχής. Στο παράδειγμα της εικόνας 36 οι ισοϋψείς καμπύλες δείχνουν όλα τα σημεία της επιφάνειας του βουνού που βρίσκονται στο ίδιο ύψος σε σχέση με την θάλασσα, για παράδειγμα 100 m από την επιφάνεια της θάλασσας. Η ισοδιάσταση στο παράδειγμα αυτό είναι ίση με 10 m, δηλαδή από την μία ισοϋψή καμπύλη στην επόμενη υπάρχει υψομετρική διαφορά 10 m. Οι κλίμακες που έχουν οι χάρτες, σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν διαφέρουν από τους απλούς χάρτες και αναφέρονται σε οριζόντιες αποστάσεις.



Εικόνα 36

Κατόπιν παρουσιάζεται η παρακάτω δραστηριότητα:
«Δύο ομάδες πεζοπόρων έκαναν μια μέρα πεζοπορία στο βουνό. Έχουν στην διάθεσή τους χάρτες πεζοπορίας, όπως αυτόν της εικόνας 37. Ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Α, που βρίσκεται στα βόρεια του βουνού και σε υψόμετρο 1.600 m και θέλουν να καταλήξουν στο σημείο Β, που βρίσκεται προς το νότιο μέρος του βουνού. Η μία ομάδα ακολούθησε το μονοπάτι που οδηγεί στην κορυφή Κ του βουνού (κόκκινη διαδρομή) και μετά στο σημείο Β, ενώ η άλλη το μονοπάτι που πάει περιμετρικά κατά μήκος της ισομετρικής καμπύλης, γύρω από την κορυφή (μπλε διαδρομή). Η κορυφή του βουνού βρίσκεται σε ύψος 1.940 m.»

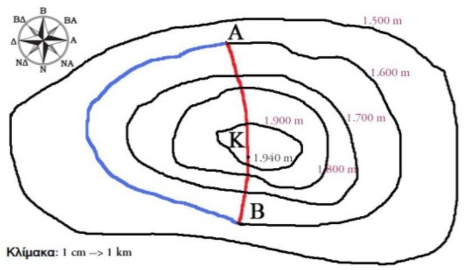
Συνοδευτικό αρχείο εργασίας: Β΄ Γυμνασίου - Τριγωνομετρία - Πεζοπορία στο βουνό (ΠΜΑ Μ6, Μ8).doc

Οι μαθητές αιτιολογούν πιο είναι το πιο ανηφορικό και το λιγότερο ανηφορικό κομμάτι της διαδρομής που έκανε η ομάδα που πέρασε από την κορυφή. Επίσης υπολογίζουν προσεγγιστικά το μήκος της κάθε διαδρομής και εξηγούν τον τρόπο εργασίας τους.

Διεργασίες μοντελοποίησης και επικοινωνίας

Αν ο διδάσκων το κρίνει σκόπιμο ζητάει από τους μαθητές να συζητήσουν τις παραδοχές και τις απλοποιήσεις που έχει η μοντελοποιημένη κατάσταση σε σχέση με την πραγματικότητα.

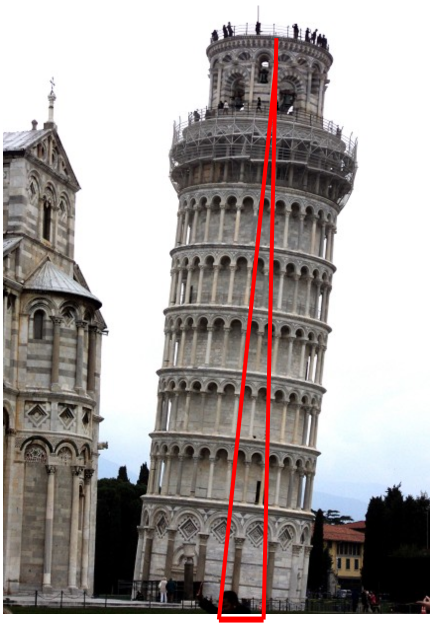
Οι αποστάσεις που μετράνε οι μαθητές στον χάρτη αντιπροσωπεύουν οριζόντιες αποστάσεις και όχι αποστάσεις πάνω στην πλαγιά του βουνού.



Εικόνα 37

Β΄ Γυμνασίου: Ο πύργος της Πίζας (ΠΜΑ: Μ6)

Ένα ζωγράφος δοκιμάζει να ζωγραφίσει τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας. Το ύψος του πύργου είναι 60 m και το ύψος που έχει τώρα, λόγω της απόκλισης από την κατακόρυφη, είναι 59,8 m. Στο σχέδιό του το ύψος του πύργου θέλει να είναι 30 cm. Αν εσύ ήσουν ο ζωγράφος πόσο θα σχεδίαζες το κατακόρυφο ύψος; Πώς θα ήσουν σίγουρος ότι με αυτές τις διαστάσεις ο πύργος της ζωγραφιάς θα γέρνει όπως ο πύργος της Πίζας;



Γ΄ Γυμνασίου. Μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων (ΠΜΑ: Μ5)

Οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τρόπους για να υπολογίσουν το ύψος ενός λόφου ή βουνού, που βρίσκεται κοντά στο σχολείο τους. Εργαζόμενοι σε ομάδες μελετούν το πρόβλημα και ανταλλάσουν απόψεις μεταξύ τους και με τις άλλες ομάδες για τα προβληματικά σημεία της κατάστασης (π.χ. δεν είναι δυνατή η μέτρηση της απόστασης της θέσης ενός παρατηρητή από την κατακόρυφο που διέρχεται από την κορυφή του βουνού ή οι γωνίες παρατήρησης, για παρατηρητές που δεν απέχουν πολύ μεταξύ τους, δεν έχουν

Διεργασία επικοινωνίας

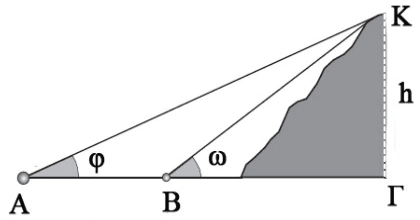
Επιλογή και χρήση

σημαντική διαφορά).

εργαλείων

Με τη χρήση του οργάνου μέτρησης γωνιών – κλίσεων (βλ. αντίστοιχη δραστηριότητα Β΄ Γυμνασίου) και τη χρήση μετροταινιών κάνουν μετρήσεις (τις γωνίες φ και ω του παρακάτω σχήματος και την ΑΒ). Εναλλακτικά, αν η μέτρηση της απόστασης ΑΒ είναι δύσκολη, ένας χάρτης της περιοχής και η αξιοποίηση της κλίμακας του, θα τους επιτρέψει να υπολογίσουν την ΑΒ. Μοντελοποιούν την κατάσταση και με τη χρήση των γνώσεων που έχουν από την τριγωνομετρία επιλύουν το πρόβλημα και συζητούν για διαφορετικές λύσεις που μπορεί να έχουν οι ομάδες.

Διεργασία μοντελοποίησης



Γ΄ Γυμνασίου: Υπολογισμός στοιχείων τριγώνου (ΠΜΑ: Μ4, Μ5)

Οι μαθητές εξετάζουν αν κατασκευάζεται ένα μόνο τρίγωνο ΑΒΓ με στοιχεία ΑΒ=9 cm, ΒΓ=6 cm και γωνία ΒΑΓ=30^0.. Δικαιολογούν γιατί προκύπτουν δύο διαφορετικά τρίγωνα με αυτά τα στοιχεία, με βάση τον νόμο των ημιτόνων και τη σχέση που έχουν τα ημίτονα των παραπληρωματικών γωνιών.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία και τα βιβλία καθηγητή.

Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να χρησιμοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου: http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html
- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b

Στοχαστικά μαθηματικά

Στατιστική

Βασικά θέματα: Δεδομένα, Μέτρα θέσης, Μεταβλητότητα

Σημασία της ενότητας: Καθημερινά οι άνθρωποι βομβαρδίζονται με διάφορες δημοσκοπήσεις, παρουσιάσεις στατιστικών διαγραμμάτων στον τύπο, αναφορές στην έννοια του «μέσου ανθρώπου», ενώ κάποιοι παίρνουν αποφάσεις βασιζόμενοι σε μελέτες που στηρίζονται στην στατιστική και τις πιθανότητες, όπως οι γιατροί. Ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών πρέπει να παρέχει την δυνατότητα στους μαθητές , αυριανούς πολίτες, να κατανοούν τις βασικές έννοιες και τις διαδικασίες της Στατιστικής, ώστε να είναι σε θέση να κατανοούν και να ελέγχουν κριτικά τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται, τις ερμηνείες και τα συμπεράσματα που εξάγονται με βάση διάφορες στατιστικές μελέτες. Στόχος αυτής της ενότητας είναι η ανάπτυξη του στατιστικού συλλογισμού και μαζί με την διδασκαλία των πιθανοτήτων στοχεύει στην ανάπτυξη της μη ντετερμινιστικής σκέψης. Παράλληλα στόχος είναι και η ανάπτυξη των απαραίτητων μαθηματικών εργαλείων που θα συμβάλλουν στα παραπάνω. Γενικά η ενότητα αυτή προσφέρεται ώστε οι μαθητές να έλθουν σε επαφή με εφαρμογές των μαθηματικών και μέσα από αυτές να δούνε τη σημασία και το ρόλο τους στην οργάνωση και ανάπτυξη της κοινωνίας. Αυτό μπορεί να συντελέσει στην αλλαγή της στάσης τους και των πεποιθήσεων τους απέναντι στα μαθηματικά.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Στο Δημοτικό, από τις μικρές κιόλας τάξεις, οι μαθητές έχουν εμπλακεί[8] με έννοιες της στατιστικής. Έχουν ασχοληθεί με:

- τα είδη των δεδομένων (ποιοτικά, διακριτά ποσοτικά και συνεχή ποσοτικά)
- τρόπους οργάνωσης τους (πίνακες συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων και απλές ομαδοποιήσεις)
- τρόπους αναπαράστασής τους (εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα, διαγράμματα συχνοτήτων) και ερμηνείας αυτών
- τα μέτρα θέσης (επικρατούσα τιμή, μέση τιμή, διάμεσος)
- το εύρος για να περιγράψουν την μεταβλητότητα των δεδομένων

[8] Ο διδάσκων θα πρέπει να λάβει υπ' όψη ότι όσα αναφέρονται στην ενότητα αυτή σχετίζονται με το συγκεκριμένο ΠΣ. Κατά την διδασκαλία της στατιστικής στο Δημοτικό το προηγούμενο ΠΣ άρχιζε από την Δ΄ τάξη και δεν περιελάμβανε την διατύπωση ερωτημάτων, την οργάνωση με απλές ομαδοποιήσεις, τα σημειογράμματα, την διάμεσο, την έννοια του δείγματος και του πληθυσμού. Με το συγκεκριμένο ΠΣ η εμπλοκή των μαθητών με την στατιστική ξεκινάει από το νηπιαγωγείο. Ομοίως, με βάση το προηγούμενο ΠΣ, η διδασκαλία της στατιστικής στο Γυμνάσιο περιορίζονταν στην Β΄ τάξη.

Επίσης έχουν προβεί σε διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν μέσα από συλλογή δεδομένων, έχουν συλλέξει δεδομένα και έχουν βγάλει συμπεράσματα βασιζόμενοι σε αυτά. Επιπλέον διακρίνουν το δείγμα από τον πληθυσμό.

Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα διατυπώσουν πιο σύνθετα ερωτήματα, θα συλλέξουν κατάλληλα δεδομένα από το σχολικό περιβάλλον, θα κατασκευάσουν απλά κυκλικά διαγράμματα και χρονοδιαγράμματα, θα αναπτύξουν μεθόδους προσδιορισμού των μέτρων θέσης πέρα από τις υπολογιστικές. Επίσης θα αρχίσουν να αναπτύσσουν μία κριτική στάση απέναντι σε παραπλανητικές παρουσιάσεις δεδομένων.

Στην Β΄ τάξη θα διατυπώσουν ερωτήματα και θα συλλέξουν δεδομένα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό τους περιβάλλον, θα κατασκευάσουν κυκλικά διαγράμματα και διαγράμματα διασποράς, θα διερευνήσουν ιδιότητες της μέσης τιμής ενώ παράλληλα θα αρχίσουν να εξετάζουν κριτικά στατιστικές έρευνες και τις ερμηνείες τους.

Στην Γ΄ τάξη θα κατασκευάσουν ιστογράμματα και θα γνωρίσουν την έννοια της μέσης απόλυτης απόκλισης, για να περιγράψουν ποσοτικά την μεταβλητότητα των δεδομένων. Θα εμπλακούν με την έννοια της αντιπροσωπευτικότητας ενός δείγματος και θα διεξάγουν στατιστική έρευνα συνδυάζοντας τις μεθόδους και τα εργαλεία που έμαθαν στο Γυμνάσιο.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με την στατιστική μπορεί να σχετίζονται με:

- την ανάγνωση και/ή την ερμηνεία των διάφορων γραφημάτων που χρησιμοποιούνται στην στατιστική. Για να μπορέσουν να διαβάσουν πληροφορίες και να εξάγουν συμπεράσματα απ' αυτά, θα πρέπει οι μαθητές να γνωρίζουν κάποιες από τις συμβάσεις που υπάρχουν σχετικά με την σχεδίασή τους. Για παράδειγμα, ότι στο ιστόγραμμα οι στήλες αντιπροσωπεύουν ένα σύνολο δεδομένων που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο διάστημα. Πολύ συχνά οι μαθητές βλέπουν και αντιμετωπίζουν τα διαγράμματα ως «εικόνες» και όχι ως εργαλεία από τα οποία μπορούν να μάθουν κάτι για ένα σύνολο δεδομένων ή να βρουν συγκεκριμένες πληροφορίες για ένα πρόβλημα.

- με τα μέτρα θέσης , τα οποία είναι μία όχι απλή στατιστική έννοια. Το να μπορεί ένας μαθητής να θεωρήσει τη διάμεσο ή τη μέση τιμή ως τους αντιπροσώπους όλης της συλλογής των δεδομένων, ιδιαίτερα όταν συγκρίνει δύο άνισα σε πλήθος σύνολα δεδομένων, είναι κάτι που χρειάζεται χρόνο και κατάλληλες δραστηριότητες για να «ωριμάσει» ως ιδέα. Σε σχέση με τη διάμεσο υπάρχει περίπτωση οι μαθητές να συγχέουν τη θέση της και την τιμή της. Σε σχέση με τη μέση τιμή οι δυσκολίες ενδέχεται να συνδέονται με ιδιότητες της, όπως το ότι η μέση τιμή της ένωσης δύο άνισων, όσον αφορά το πλήθος, συνόλων δεδομένων δεν είναι ίση με το ημιάθροισμα των μέσων τιμών αυτών. Οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με τα μέτρα θέσης δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν αποκλειστικά και μόνο με υπολογιστικές προσεγγίσεις.

- δυσκολίες που συνδέονται με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα η έννοια του ποσοστού, του κλάσματος κ.λπ.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η στατιστική σχετίζεται με την προσπάθεια κατανόησης, μέτρησης και περιγραφής διαδικασιών ή καταστάσεων του πραγματικού κόσμου, μέσα από την επεξεργασία ενός κατάλληλου αριθμού δεδομένων. Είναι σημαντικό οι μαθητές να χρησιμοποιούν και πραγματικά δεδομένα. Τα δεδομένα αυτά μπορεί να τα έχουν συλλέξει οι ίδιοι με δικές τους στατιστικές έρευνες , πειράματα κ.λπ. ή να προέρχονται από άλλες πηγές όπως οι στατιστικές υπηρεσίες, το διαδίκτυο, έρευνες που έχουν κάνει άλλοι κ.λπ. Η συλλογή δεδομένων θα επιτρέψει στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά με διαδικασίες της στατιστικής, ενώ παράλληλα θα αναδυθούν θέματα που σχετίζονται με έννοιές της καθώς και σε ορισμένες περιπτώσεις με έννοιες από άλλες μαθηματικές περιοχές. Για παράδειγμα, η συλλογή μετρήσεων που αφορούν π.χ. το ύψος ή την έκταση των χεριών των μαθητών, εκτός του ότι θα αποτελεί ένα πλαίσιο αναφοράς για να μελετήσουν συγκεκριμένες έννοιες της στατιστικής, όπως το διάγραμμα διασποράς, αναδεικνύει ταυτόχρονα θέματα που σχετίζονται με παράγοντες της μεταβλητότητας, δηλαδή της διαφορετικότητας των δεδομένων λόγω σφαλμάτων στη διαδικασία μέτρησης. Παράλληλα όμως οι μαθητές διαπραγματεύονται και θέματα μονάδων μέτρησης. Η συλλογή δεδομένων δεν είναι απαραίτητο να γίνεται μόνο κατά τη διάρκεια διδασκαλίας της ενότητας αλλά μπορεί να γίνει με αφορμή κάποια άλλη δραστηριότητα (π.χ. αποτελέσματα πειράματος τύχης, προσεγγιστικός υπολογισμός ύψους κτιρίου, μετρήσεις από ένα πείραμα κ.λπ.). Κάτι τέτοιο θα επιτρέψει στον διδάσκοντα να διαχειριστεί καλύτερα τον διδακτικό χρόνο ή να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις με άλλες μαθηματικές έννοιες ή δεσμούς με άλλα αντικείμενα όπως η Φυσική. Τα δεδομένα που συλλέγουν οι μαθητές μια χρονιά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και κάποια επόμενη (αρκεί να τα έχει φυλάξει ο διδάσκων) μαζί με νέα, για να αποτελέσουν π.χ. αντικείμενο συγκρίσεων ή ανάπτυξης νέων εννοιών.

Ένα «στατιστικό πρόβλημα» συνήθως περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια:

α) Διατύπωση ενός ερωτήματος για εξερεύνηση. Κατά το στάδιο αυτό αποφασίζεται και ποια δεδομένα θα συλλεχθούν για να απαντηθεί το ερώτημα.

β) Συλλογή των δεδομένων. Στο στάδιο αυτό αποφασίζονται οι τρόποι και διαδικασίες με τις οποίες θα συλλεχθούν τα δεδομένα.

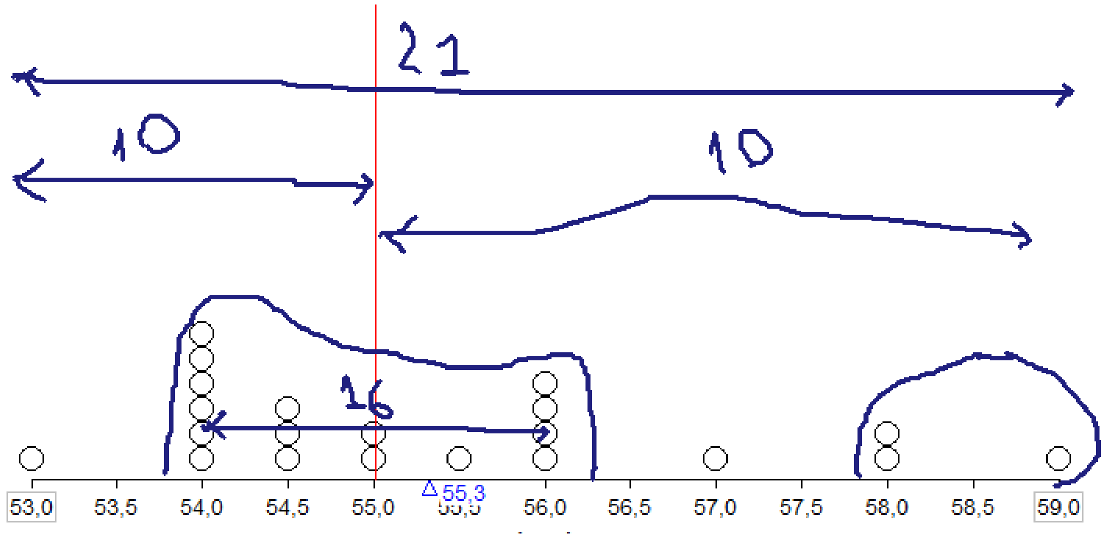
γ) Οργάνωση, αναπαράσταση και ανάλυση των δεδομένων. Κατά το στάδιο αυτό συνοψίζονται τα δεδομένα και περιγράφονται διάφορα χαρακτηριστικά τους όπως τα μέτρα θέσης, το εύρος, μέγιστη – ελάχιστη τιμή κ.λπ.

δ) Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων σε σχέση με το ερώτημα.

Τα προηγούμενα δεν εξελίσσονται πάντα σειριακά. Για παράδειγμα. μπορεί να έχουν συλλεχθεί δεδομένα και μετά από κάποια ανάλυση να προκύψει ανάγκη για νέα δεδομένα. Τα ερωτήματα μπορεί να είναι πολύ γενικά στην αρχή και στην συνέχεια να γίνονται πιο ακριβή ή πιο σύνθετα. Για παράδειγμα. οι μαθητές μπορεί να συζητούν σχετικά με το ερώτημα «ποιος είναι ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές για να φτάσουν από το σπίτι τους στο σχολείο;». Αν ο διδάσκων ζητήσει από τους μαθητές να εξηγήσουν διάφορους λόγους για τους οποίους οι χρόνοι των μαθητών θα είναι διαφορετικοί μπορεί να οδηγηθούν σε νέα ερωτήματα. Μπορεί π.χ. να θέσουν το ερώτημα «πόσο μπορεί να επηρεάζει ο καιρός τον χρόνο μετακίνησης;» και κάποιοι μαθητές να κάνουν αυτή την έρευνα.

Τα διαγράμματα είναι ένα βασικό εργαλείο με το οποίο θα πρέπει να μάθουν να εργάζονται οι μαθητές. Στόχος δεν είναι μόνο να μάθουν να κατασκευάζουν τα διάφορα διαγράμματα, αλλά και να τα αναλύουν. Τα διαγράμματα είναι μια «εικόνα» των δεδομένων και βοηθούν να αντλήσουμε πολλές πληροφορίες. Διαγράμματα που έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν από τους μαθητές, όπως για παράδειγμα, τα σημειογράμματα ή τα διπλά ραβδογράμματα στο Δημοτικό σχολείο, είναι καλό να χρησιμοποιούνται ξανά,. Μερικές φορές χρειάζονται αρκετά διαγράμματα για να φανεί η «ιστορία» που διηγούνται τα δεδομένα, δηλαδή για να αποκαλυφτούν τάσεις ή χαρακτηριστικά που μπορεί να υπάρχουν. Η χρήση λογιστικών προγραμμάτων, όπως το Excel , με τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν πολλά και διαφορετικά διαγράμματα και τα οποία ενημερώνονται αυτόματα όταν αλλάζουν τα δεδομένα, ή κατάλληλων μικρών εφαρμογών από το διαδίκτυο, είναι κάτι που βοηθάει στην κατανόηση της σημασίας των διαγραμμάτων. Με βάση διαγράμματα όπως τα σημειογράμματα και τα διαγράμματα συχνοτήτων, οι μαθητές θα πρέπει να συνηθίσουν να κάνουν παρατηρήσεις σχετικά με τον τρόπο που εμφανίζονται να είναι κατανεμημένα τα δεδομένα και να περιγράφουν διάφορα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, να περιγράφουν την περιοχή έκτασης των δεδομένων, να περιγράφουν περιοχές που είναι συγκεντρωμένα πολλά δεδομένα ή περιοχές που δεν εμφανίζονται δεδομένα, να κοιτούν για δεδομένα που να είναι απομακρυσμένα σε σχέση με τα υπόλοιπα κ.λπ. Οι περιγραφές θα πρέπει να σχετίζονται με το πλαίσιο του προβλήματος που εξετάζουν ενώ αν έχουν υπολογιστεί κάποια άλλα χαρακτηριστικά των δεδομένων να συνδέονται με αυτά.

Για παράδειγμα, έστω ότι εξετάζουν τα αποτελέσματα της μέτρησης που έκαναν 21 μαθητές στην περίμετρο του κεφαλιού ενός συγκεκριμένου συμμαθητή τους. Οι μετρήσεις έγιναν με ακρίβεια ½ cm και τα αποτελέσματα έχουν παρασταθεί με σημειόγραμμα, ενώ έχουν υπολογιστεί η διάμεσος τιμή των μετρήσεων (55 cm) και η μέση τιμή των μετρήσεων (≈55,3 cm) και έχουν παρασταθεί στο διάγραμμα με την κόκκινη γραμμή και το μπλε τριγωνάκι αντίστοιχα.



Κάποιες από τις παρατηρήσεις και τις περιγραφές που θα μπορούσαν να κάνουν είναι οι παρακάτω:

- Οι μετρήσεις του κεφαλιού του …. κυμαίνονται από 53 cm μέχρι και 59 cm, δηλαδή υπάρχουν 21 μετρήσεις σε ένα διάστημα πλάτους 6 cm. Οι μετρήσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους γιατί μπορεί κατά την διαδικασία μέτρησης να μην τοποθέτησαν στα ίδια σημεία του κεφαλιού την μεζούρα, άλλοι να χρησιμοποίησαν μεζούρα και άλλοι σχοινί, να μην κοιτούσαν την ένδειξη της μέτρησης με την ίδια οπτική γωνία, να μην στρογγυλοποίησαν σωστά κ.λπ., δηλαδή προέκυψαν διαφορετικές μετρήσεις λόγω σφαλμάτων μέτρησης.
- Οι περισσότερες από τις μετρήσεις είναι συγκεντρωμένες στην «περιοχή» από 54 cm έως 56 cm. Συγκεκριμένα 16 μετρήσεις από τις 21 είναι συγκεντρωμένες σε «περιοχή» πλάτους 2 cm. Στην «περιοχή» αυτή ανήκουν η διάμεσος τιμή των μετρήσεων και η μέση τιμή των μετρήσεων.
- Κάποιες από τις μετρήσεις είναι απομακρυσμένες από την «κεντρική περιοχή» των μετρήσεων. Αυτό ίσως να οφείλεται σε μεγάλα σφάλματα μέτρησης.
- Η διάμεσος τιμή των μετρήσεων είναι 55 cm, δηλαδή 10 από τις 21 μετρήσεις είναι κάτω από τα 55 cm σε «περιοχή» πλάτους 2 cm και 10 από τις υπόλοιπες 21 μετρήσεις είναι πάνω από τα 55 cm σε «περιοχή» πλάτους 4 cm.

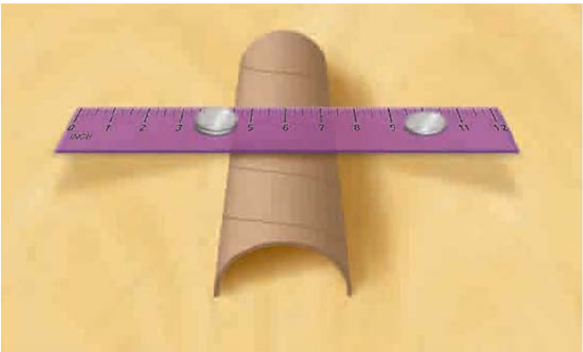
Τα παραπάνω είναι άτυπες περιγραφές της κατανομής και έχουν ως σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές να βλέπουν τα δεδομένα ως κάτι ενιαίο αλλά ταυτόχρονα και με επιμέρους χαρακτηριστικά. Επίσης προσβλέπουν στο να εξετάζουν με άτυπο τρόπο, θέματα που σχετίζονται με την διασπορά και την μεταβλητότητα των δεδομένων.

Η μεταβλητότητα είναι πανταχού παρούσα στα δεδομένα και αυτός είναι ένας από τους λόγους ύπαρξης της Στατιστικής. Υπάρχουν διαφορετικές πηγές από τις οποίες προκύπτει η μεταβλητότητα στα δεδομένα και κάποιες απ’ αυτές είναι:

- Η μεταβλητότητα λόγω μετρήσεων. Αιτίες γι’ αυτό αναφέρθηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα.
- Η φυσική μεταβλητότητα. Τα άτομα είναι διαφορετικά. Οι άνθρωποι έχουν διαφορετικά ύψη, διαφορετικές συνήθειες, γνώμες, ικανότητες κ.λπ. Σπόροι από την ίδια ποικιλία θα αναπτυχθούν διαφορετικά ακόμα και αν είναι στο ίδιο περιβάλλον.
- Μεταβλητότητα η οποία έχει προκληθεί από κάποιον παράγοντα. Αν φυτέψουμε σπόρους της ίδιας ποικιλίας σε δύο μέρη με διαφορετικό κλίμα και παρατηρήσουμε διαφορά στον τρόπο ανάπτυξης των φυτών αυτή η διαφορά μπορεί να οφείλεται στη φυσική μεταβλητότητα ή στο γεγονός ότι οι τοποθεσίες δεν είναι ίδιες ή σε κάποιον άλλο παράγοντα. Προσεκτικοί σχεδιασμοί πειραμάτων ή ερευνών μπορεί να βοηθήσουν στον προσδιορισμό της επίδρασης των διαφόρων παραγόντων.
- Μεταβλητότητα λόγω δειγματοληψίας. Το ένα δείγμα θα διαφέρει από το άλλο.

Για να περιγραφεί ποσοτικά η μεταβλητότητα χρησιμοποιούνται τα μέτρα διασποράς. Στην Γ΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα την περιγράψουν με την μέση απόλυτη απόκλιση που είναι το πηλίκο του αθροίσματος των αποστάσεων των δεδομένων από την μέση τιμή προς το πλήθος των δεδομένων. Δηλαδή, η μέση απόσταση που έχουν τα δεδομένα από την μέση τιμή.

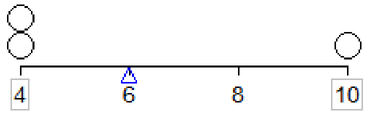
Σχετικά με την διδασκαλία των μέτρων θέσης, η μέση τιμή μπορεί να παρουσιαστεί με τη χρήση της μεταφοράς της «δίκαιης μοιρασιάς». Π.χ. οι βαθμοί ενός μαθητή σε ένα μάθημα κάθε τρίμηνο μετράνε το ίδιο για την εξαγωγή του βαθμού στο μάθημα αυτό στο τέλος του έτους. Επίσης χρειάζεται να παρουσιαστεί και ως «το σημείο ισορροπίας» των δεδομένων. Αυτό μπορεί να γίνει με την χρήση ενός φυσικού μοντέλου, όπως είναι ένας χάρακας πάνω σε μία κυρτή επιφάνεια, λίγα ίδια κέρματα και η προσπάθεια διατήρησης της ισορροπίας του συστήματος (εικόνα 1).



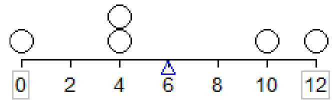
Εικόνα 1

Το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το αντίστοιχο της μέσης τιμής των δεδομένων. Τα δεδομένα μπορεί να παρουσιαστούν ότι έχουν τιμή ίση με την ένδειξη του χάρακα στη θέση που τοποθετείται το κάθε νόμισμα, οπότε η μέση τιμή τους θα είναι η ένδειξη του χάρακα εκεί που ισορροπεί το σύστημα.

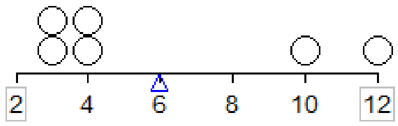
Για να διατηρηθεί η ισορροπία του συστήματος όταν τοποθετούμε ένα νέο νόμισμα σε κάποια απόσταση από το κέντρο ισορροπίας, πρέπει να τοποθετήσουμε στην αντίθετη κατεύθυνση: ένα ίδιο νόμισμα στην ίδια απόσταση ή δύο ίδια νομίσματα στο μισό της απόστασης ή τρία ίδια νομίσματα στο 1/3 της απόστασης κ.λπ. Οι εικόνες 2, 3, 4 και 5 δείχνουν κατά σειρά αυτές τις καταστάσεις με σημειογράμματα για κάποια δεδομένα και την μέση τιμή να αναπαρίσταται με το μπλε τρίγωνο.



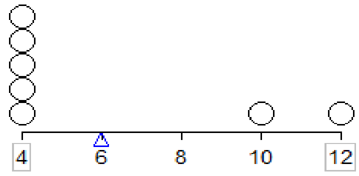
Εικόνα 2



Εικόνα 3

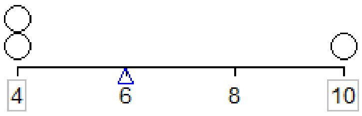


Εικόνα 4

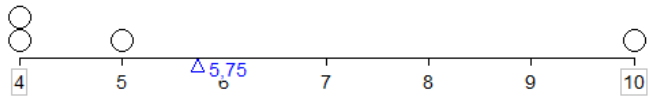


Εικόνα 5

Αν τοποθετήσουμε μόνο ένα νόμισμα σε κάποια απόσταση από το σημείο ισορροπίας τότε το κέντρο ισορροπίας του νέου συστήματος θα μετακινηθεί προς την κατεύθυνση που τοποθετήσαμε το νέο νόμισμα. Οι εικόνες 6 και 7 δείχνουν κατά σειρά αυτές τις καταστάσεις με σημειογράμματα, όπου όταν προστέθηκε ένα νέο δεδομένο με τιμή 5, η νέα μέση τιμή μετακινήθηκε προς την κατεύθυνση του 5 και έγινε 5,75 .



Εικόνα 6



Εικόνα 7

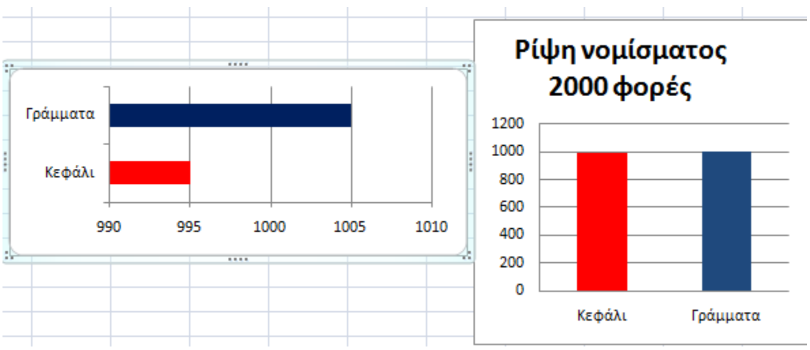
Η μέση τιμή και η διάμεσος πρέπει να παρουσιάζονται ως αντιπρόσωποι του συνόλου των δεδομένων. Ένα πλαίσιο που θα βοηθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν αυτή την εικόνα, είναι αυτό των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων του ίδιου αντικειμένου, όπου η μέση τιμή ή η διάμεσος προβάλει ως ο αντιπρόσωπος όλων των μετρήσεων. Ευκαιρίες για κάτι τέτοιο προσφέρονται όταν οι μαθητές κάνουν π.χ. κάποια μέτρηση στην Γεωμετρία. Επίσης οι συγκρίσεις δύο ομάδων (π.χ. αγόρια – κορίτσια) ως προς κάποιο χαρακτηριστικό.

Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα πρέπει να ασχοληθούν με δραστηριότητες που θα τους επιτρέψουν να αναπτύξουν τεχνικές εικασίας ή/ και προσδιορισμού της μέσης τιμής και της διαμέσου μέσα από τις αναπαραστάσεις των δεδομένων ώστε να μην εργάζονται μόνον αλγοριθμικά. Θα πρέπει να δουλέψουν και με την παρουσίαση της μέσης τιμής ως «δίκαιης μοιρασιάς» και να αρχίσουν να δουλεύουν με την μέση τιμή ως το σημείο ισορροπίας των δεδομένων.

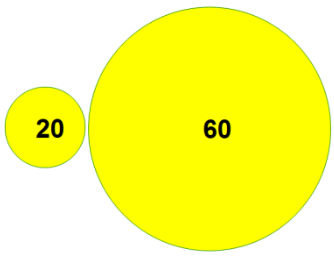
Στην Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα διερευνήσουν ιδιότητες της μέσης τιμής όπως την μεταβολή της όταν προστίθενται – πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό. Επίσης θα πρέπει να εμπλακούν με δραστηριότητες κατά τις οποίες θα αναγνωρίσουν ότι αν δύο ομάδες είναι άνισες σε πλήθος τότε η μέση τιμή του συνόλου των δύο ομάδων δεν είναι ίση με το ημιάθροισμα των μέσων τιμών των δύο ομάδων.

Είναι σημαντικό οι μαθητές να αποκτήσουν μια κριτική στάση απέναντι στα συμπεράσματα που παρουσιάζονται με βάση διάφορες στατιστικές μελέτες είτε στον τύπο είτε αλλού. Τα διαγράμματα ή τα γραφήματα που συνοδεύουν στατιστικές πληροφορίες μπορεί να παρουσιάζουν θελημένα ή αθέλητα μια εντελώς παραπλανητική ιστορία. Αυτό μπορεί να σχετίζεται:

- με την κλίμακα του διαγράμματος (εικόνα 8).
- με την μεταβολή του εμβαδού όταν μεταβάλλονται οι γραμμικές διαστάσεις κατά τον ίδιο αριθμό. Συνήθως εμφανίζονται εικόνες ή κύκλοι αλλά η σχέση των μεγεθών δεν είναι τέτοια που να δικαιολογεί την «εντύπωση» που αφήνει η σύγκριση των επιφανειών των εικόνων ή των κύκλων (εικόνα 9). Στις περιπτώσεις αυτές θα έπρεπε να χρησιμοποιούνται ραβδογράμματα ή διαγράμματα συχνοτήτων, γιατί η μία διάσταση παραμένει σταθερή. Τέτοια λανθασμένα ή παραπλανητικά διαγράμματα εμφανίζονται κατά καιρούς σε εφημερίδες (κυρίως στα οικονομικά θέματα), σε διαφημίσεις κ.λπ. Το ζήτημα διδακτικά μπορεί να συνδεθεί με την Γεωμετρία και την Άλγεβρα ζητώντας π.χ. να δημιουργήσουν νέα διαγράμματα με βάση τις σχέσεις των μεγεθών ώστε οι επιφάνειες των εικόνων, κύκλων κ.λπ. να είναι ανάλογες προς αυτές τις σχέσεις.

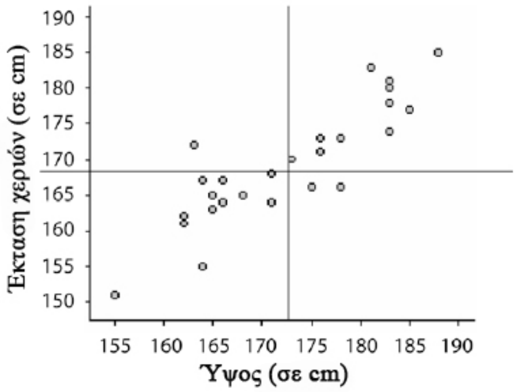


Εικόνα 8



Εικόνα 9

Στην Β΄ τάξη οι μαθητές θα εμπλακούν με τα διαγράμματα διασποράς τα οποία παρουσιάζουν ταυτόχρονα δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά της ίδιας περίπτωσης π.χ. το ύψος και η έκταση των χεριών ενός ανθρώπου. Μέσω αυτών μελετάται η συσχέτιση (δηλ. η σχέση) που μπορεί να έχουν τα δύο χαρακτηριστικά. Αυτό που έχει σημασία είναι να παρατηρήσουν οι μαθητές την συμμεταβολή των δύο χαρακτηριστικών. Για να γίνει αυτό χωρίζουν τα σημεία του διαγράμματος διασποράς σε «τεταρτημόρια» με δύο ευθείες που διέρχονται από την μέση τιμή του κάθε χαρακτηριστικού (εικόνα 10).



Εικόνα 10

Περιγράφουν το τι σημεία περιλαμβάνει το κάθε τεταρτημόριο π.χ. το πάνω αριστερά περιλαμβάνει σημεία που αντιστοιχούν σε ανθρώπους με ύψος κάτω από τον μέσο όρο του ύψους (γιατί βρίσκονται αριστερά της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από την μέση τιμή του ύψους) και ταυτόχρονα με έκταση χεριών πάνω από τον μέσο όρο της έκτασης χεριών (γιατί βρίσκονται πάνω από την οριζόντια ευθεία). Τα περισσότερα σημεία του συγκεκριμένου διαγράμματος βρίσκονται στο κάτω αριστερά και στο πάνω δεξιά τεταρτημόριο. Δηλαδή δείχνουν ότι υπάρχει η τάση καθώς αυξάνεται το ύψος να αυξάνεται η έκταση των χεριών. Η συσχέτιση στην προηγούμενη περίπτωση χαρακτηρίζεται θετική. Αν η τάση είναι καθώς αυξάνεται το ένα χαρακτηριστικό να μειώνεται το άλλο η συσχέτιση χαρακτηρίζεται αρνητική και τα περισσότερα σημεία θα βρίσκονται στα πάνω αριστερά και κάτω δεξιά τεταρτημόρια. Παράδειγμα αρνητικής συσχέτισης είναι η διάρκεια ζωής των ζωντανών οργανισμών και η μόλυνση σε μια περιοχή. Μπορεί όμως να μην είναι ευδιάκριτη πάντα η τάση που υπάρχει και αυτό εξετάζεται με άλλες μεθόδους. Να διευκρινιστεί ότι η σχέση που έχουν τα δύο χαρακτηριστικά δεν είναι συνάρτηση (οι μαθητές αναζητούν σημεία που δείχνουν κάτι τέτοιο ή σκέφτονται σε ποιο οικίες καταστάσεις, όπως ύψος - βάρος), αλλά μπορεί να μοντελοποιηθεί με κάποια συνάρτηση, για να γίνουν προβλέψεις ή να βγούνε συμπεράσματα με πιο σύνθετες τεχνικές. Μπορεί ο διδάσκων να διευκρινίσει προς τους μαθητές με ένα παράδειγμα, ότι δεν μπορούμε να βγάζουμε οποιαδήποτε συμπεράσματα επειδή υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα σε δύο χαρακτηριστικά και χρειάζεται να τα εξετάζουμε με την κοινή λογική. Για παράδειγμα, «σε μία έρευνα που συσχέτιζε διάρκεια ζωής ανθρώπων με αριθμό αυτοκινήτων, βρέθηκε ότι υπήρχε η τάση οι άνθρωποι με περισσότερα αυτοκίνητα να ζουν και περισσότερο. Μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι θα είμαστε πιο υγιείς αν αγοράζουμε περισσότερα αυτοκίνητα;» Στο παράδειγμα αυτό η συσχέτιση υπάρχει γιατί υποκρύπτεται ένα άλλο χαρακτηριστικό που είναι το εισόδημα.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου: (ΠΜΑ: Σ2, Σ4, Σ5, Σ7)

Οι μαθητές διεξάγουν μία έρευνα προκειμένου να προσδιορίσουν τα «τυπικά» χαρακτηριστικά του μαθητή της Α΄ Γυμνασίου.

Καθορίζουν ποια χαρακτηριστικά θα μελετήσουν ως «τυπικά». Για παράδειγμα: φυσιολογικά χαρακτηριστικά (ύψος, μήκος της έκτασης των χεριών, έκταση δακτύλων χεριού κ.λπ.), ώρες διαβάσματος, ώρες ξεκούρασης, εξωσχολικές δραστηριότητες, χρόνος που χρειάζονται για να πάνε στο σχολείο, τρόπος μετακίνησης προς το σχολείο κ.λπ.
Καθορίζουν αν η μελέτη θα αφορά τους μαθητές του τμήματος που ανήκουν ή όλους τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου του σχολείου τους για να αποφασίσουν τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να συγκεντρώσουν τα δεδομένα και από ποιους.

Καθορίζουν τις διαδικασίες όπως για παράδειγμα: Αν ένα από τα χαρακτηριστικά που πρόκειται να εξεταστεί είναι «ο χρόνος που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο» θα πρέπει να αποφασίσουν για το πώς θα αποκτήσουν τα σχετικά δεδομένα. Μπορεί να ρωτάνε κάποιον και να λέει την προσωπική του εκτίμηση ή κάθε μαθητής να καταγράψει για πέντε ημέρες τους χρόνους που χρειάστηκε και να χρησιμοποιηθεί ο μέσος όρος αυτών. Συζητούν για τα υπέρ και τα κατά των δύο μεθόδων και επιχειρηματολογούν σχετικά.

Διεργασία επιχειρηματολογίας

Συγκεντρώνουν τα δεδομένα, τα επεξεργάζονται, εξάγουν συμπεράσματα και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους.

Διεργασία επικοινωνίας

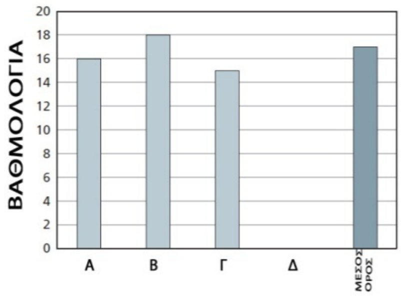
Α΄ Γυμνασίου: ΣΔ1 (ΠΜΑ: Σ5)

Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να αρχίσουν να αναγνωρίζουν ότι ο τρόπος με τον οποίο ξεκινάει η κλίμακα του διαγράμματος επηρεάζει το οπτικό αποτέλεσμα που εμφανίζεται. Αυτό κάποιες φορές έχει σημασία, ειδικά αν συνοδεύεται από κάποια συμπεράσματα. Η δήλωση που γίνεται είναι κατά ένα μέρος αληθής. Η εκπομπή Α είναι πιο δημοφιλής αλλά δεν είναι σχεδόν 4 φορές πιο δημοφιλής από την Β. Το πόσες φορές πιο δημοφιλής είναι μπορούν οι μαθητές να το βρουν προσεγγιστικά αλλά και να το δουν οπτικά αν κάνουν τα δύο διαγράμματα με κλίμακα που να ξεκινάει από το μηδέν.

Α΄ Γυμνασίου: (ΠΜΑ: Σ6)

Ο διδάσκων παρουσιάζει μια δραστηριότητα σαν την παρακάτω με στόχο να αναπτύξουν οι μαθητές ικανότητες να προσδιορίζουν την μέση τιμή μέσα από την γραφική αναπαράσταση. Η χρήση χαρτιού με τετραγωνάκια θα βοηθήσει τους μαθητές. Η πτυχή της μέσης τιμής που παρουσιάζεται εδώ είναι αυτή της «δίκαιης μοιρασίας». Επεκτάσεις που θα μπορούσαν να γίνουν είναι να δημιουργήσουν οι μαθητές μία κατάσταση και για τρίτο μαθητή που να έχει τον ίδιο μέσο όρο και να είναι διαφορετική από τις δύο άλλες.

«Η Μαρία έχει γράψει στα Μαθηματικά τέσσερα τεστ. Το ραβδόγραμμα (εικόνα 11) παρουσιάζει την βαθμολογία της στα τεστ Α, Β και Γ καθώς επίσης και τον μέσο όρο όλων των τεστ (η τελευταία σκούρα ράβδος).



Εικόνα 11

α) Να σχεδιάσετε πάνω στο ίδιο διάγραμμα και δίπλα στη βαθμολογία της Μαρίας, τη βαθμολογία που έχει σε κάθε τεστ ένας άλλος μαθητής ο Γιάννης, αν γνωρίζετε ότι: οι βαθμοί του και στα τέσσερα τεστ ήταν ίσοι μεταξύ τους και ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τον ίδιο μέσο όρο.

β) Με βάση το νέο διάγραμμα που φτιάξατε, μπορείτε να σχεδιάσετε την βαθμολογία που έχει η Μαρία στο τεστ Δ; Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.»

Α΄ Γυμνασίου: ΣΔ2 (ΠΜΑ: Σ6, Σ7)

Στόχος της δραστηριότητας είναι να δουν κάποιες ιδιότητες της μέσης τιμή και της διαμέσου. Χρειάζεται αρκετό χρόνο για να γίνει η δραστηριότητα μέχρι να εξοικειωθούν οι μαθητές με το περιβάλλον, να αρχίσουν να αναπτύσσουν διάφορες στρατηγικές και μετά να σκεφτούν πάνω σε αυτές και να τις εξηγήσουν. Γι’ αυτό ο διδάσκων πρέπει στην αρχή να βάλει μικρούς στόχους για την δημιουργία συνόλων δεδομένων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και γενίκευση
Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας

Β΄ Γυμνασίου: ΣΔ1 (ΠΜΑ: Σ3, Σ4)

Στόχος της δραστηριότητας είναι να χρησιμοποιήσουν πραγματικά δεδομένα που θα προέρχονται από τους ίδιους για να δημιουργήσουν το διάγραμμα διασποράς. Η ανάλυσή του θα γίνει με παραπλήσιο τρόπο όπως έχει περιγραφεί στις διδακτικές οδηγίες. Η δραστηριότητα στοχεύει και στη δημιουργία συνδέσεων με την Άλγεβρα με θέματα που σχετίζονται με την συμμεταβολή και την συνάρτηση. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν την ψ=χ ως κάποια συνάρτηση που θα μοντελοποιούσε την κατάσταση.

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων

Β΄ Γυμνασίου: ΣΔ2 (ΠΜΑ: Σ7)

Στόχος της δραστηριότητας είναι να διερευνήσουν κυρίως ιδιότητες της μέσης τιμής. Ο διδάσκων θα πρέπει να δημιουργήσει κατάλληλα προβλήματα για τους μαθητές για να «δουν» την πτυχή της μέσης τιμής

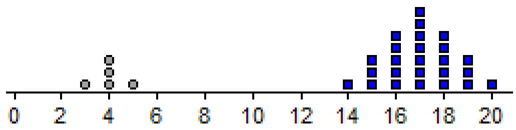
Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και γενίκευση ως το «σημείο ισορροπίας» των δεδομένων, ώστε στην επόμενη τάξη να έχουν το διαισθητικό υπόβαθρο για την κατανόηση της μέσης απόλυτης απόκλισης.

Β΄ Γυμνασίου: ΣΔ2 (ΠΜΑ: Σ7, Σ8)

Οι μαθητές διερευνούν το παρακάτω πρόβλημα και προσπαθούν να το αντιμετωπίσουν με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους:
«Σε μία τάξη 30 μαθητών οι μαθητές έχουν γράψει τεστ και οι βαθμολογίες τους είναι όπως δείχνει το παρακάτω σημειόγραμμα (εικόνα 12). Για παράδειγμα, τρεις μαθητές απ' όλη την τάξη έχουν γράψει 15 και ένας μαθητής μόνον έχει γράψει 20.

α) Προτείνετε τρόπους με τους οποίους θα προσδιοριστεί η μέση τιμή της βαθμολογίας της ομάδας Α (γκρι κυκλάκια στο διάγραμμα), που για διάφορους λόγους είχε χαμηλή βαθμολογία στο τεστ. Ομοίως για την μέση τιμή της βαθμολογίας της ομάδας Β (μπλε τετραγωνάκια στο διάγραμμα)

β) Προτείνετε τρόπους για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής της βαθμολογίας για όλη την τάξη στο τεστ αυτό.»



Εικόνα 12

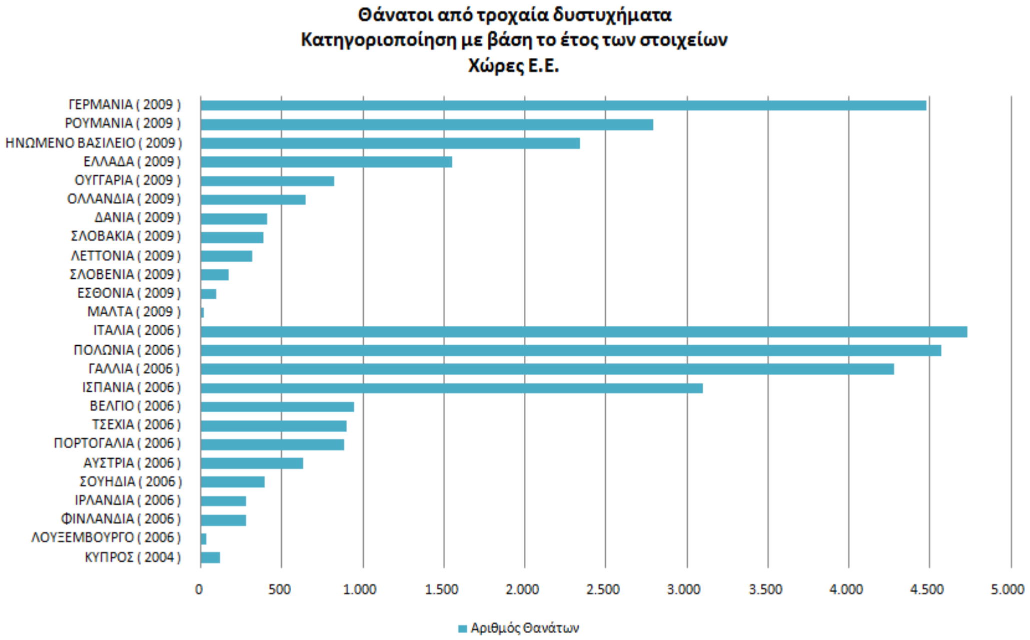
Β΄ Γυμνασίου: Θάνατοι από τροχαία

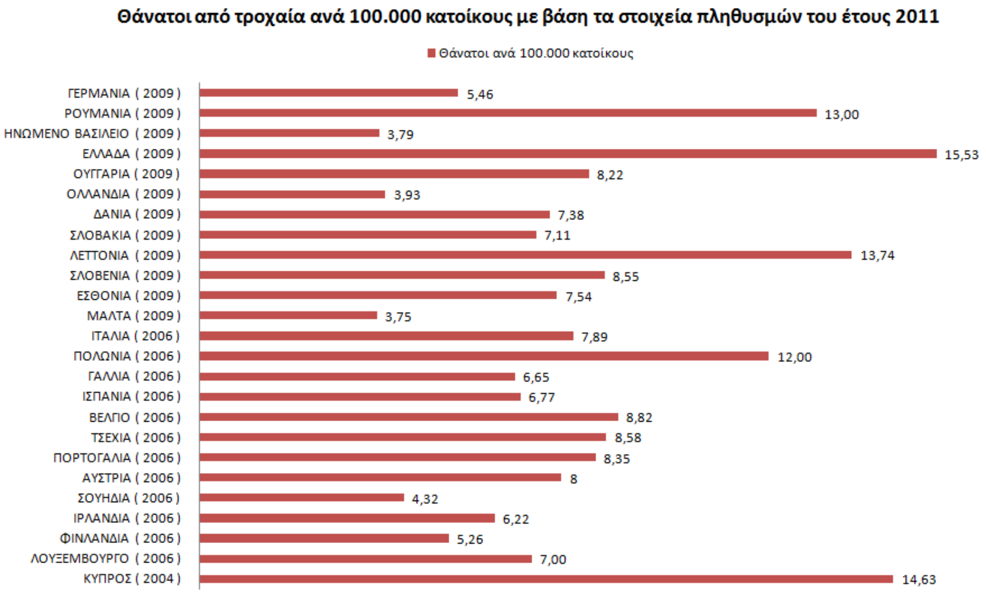
Οι παρακάτω πίνακες δίνουν στοιχεία για τον αριθμό των θανάτων από τροχαία δυστυχήματα στις χώρες της Ε.Ε. και τον αριθμό των θανάτων ανά 100.000 κατοίκους από τροχαία δυστυχήματα. Με βάση αυτούς τους πίνακες ο εκπαιδευτικός μπορεί να σχεδιάσει μια δραστηριότητα ώστε να αναδείξει τη σημασία που έχουν όχι μόνο τα απόλυτα μεγέθη αλλά και τα σχετικά. Επίσης παράλληλα μπορεί να αναδείξει το σοβαρό κοινωνικό πρόβλημα που δημιουργείται από τα τροχαία ατυχήματα ώστε να ευαισθητοποιήσει τους μαθητές σχετικά με αυτό το θέμα.

Συνοδευτικό αρχείο εργασίας: Β' Γυμν-Στατιστική-Θάνατοι από τροχαία.doc

Τα στοιχεία για τον αριθμό θανάτων έχουν παρθεί από τη βάση δεδομένων CARE της Ευρωπαϊκής Ένωσης για την οδική ασφάλεια:http://ec.europa.eu/transport/road_safety/specialist/statistics/care_reports_graphics/index_en.htm και τα στοιχεία για τους πληθυσμούς από την δικτυακή πύλη Europa της Ευρωπαϊκής Ένωσης:http://europa.eu/about-eu/countries/member-countries/netherlands/index_el.htm

Στη βάση CARE υπάρχουν και άλλες αναφορές με κατηγοριοποιήσεις ανά ηλικία, είδος οχήματος κ.λπ. για διάφορες χρονιές και αν διδάσκων θέλει μπορεί να αναθέσει στους μαθητές να κάνουν μελέτες συγκριτικές με κάποιες χώρες για τους θανάτους σε νεαρές ηλικίες, που ίσως να συνδυαστούν και με άλλες δράσεις του σχολείου.





Γ΄ Γυμνασίου: ΣΔ1 του ΠΣ (ΠΜΑ: Σ4)

Στόχος της δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της μέσης απόλυτης απόκλισης και να την συνδέσουν με όσα γνωρίζουν από τις προηγούμενες τάξεις

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από το υπάρχον σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου κεφ. 4) και το βιβλίο καθηγητή.

Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Ψηφιακά εργαλεία για διάφορες αναπαραστάσεις δεδομένων (σημειογράμματα, ιστογράμματα, διασποράς κ.λπ.):
  http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00072/toepassing_wisweb/.en/.html
  http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00073/toepassing_wisweb.en.html
  http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00125/toepassing_wisweb.en.html
  Τα εργαλεία αυτά έχουν και διάφορα δεδομένα αλλά μπορεί να βάλει κάποιος νέα. Επίσης υπάρχει η δυνατότητα να γίνονται συγκρίσεις διαφορετικών ομάδων.
- Ψηφιακά εργαλεία για διαγράμματα διασποράς και ιστογράμματα: http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_3_t_5.html
- Υλικό για ιδέες για την διδασκαλία της Στατιστικής και βάσεις δεδομένων από τις οποίες μπορεί κανείς να αντλήσει δεδομένα που να αφορούν χαρακτηριστικά μαθητών διαφόρων ηλικιών:
  http://www.censusatschool.org.nz/index.php
  http://www.censusatschool.ca/r000-eng.htm

  http://www.abs.gov.au/censusatschool
  http://www.censusatschool.org.uk/
- Υλικό σχετικό με την έννοια της μεταβλητότητας και ιδέες για την διδασκαλία της Στατιστικής: http://www.amstat.org/education/gaise/
- Υλικό για ιδέες σχετικές με την παρουσίαση θεμάτων της Στατιστικής στον τύπο: http://www.mercurynie.com.au/mathguys/mercury.htm

Πιθανότητες

Βασικά θέματα: Πείραμα τύχης – Δειγματικοί χώροι, Πιθανότητα ενδεχομένου (Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου)

Σημασία της ενότητας: Στόχος αυτής της ενότητας, όπως και της ενότητας της Στατιστικής, είναι η ανάπτυξη ενός μη ντετερμινιστικού τρόπου σκέψης και συλλογισμού, που είναι αρκετά διαφορετικός από την συλλογιστική στην Άλγεβρα ή την Γεωμετρία. Αυτό γίνεται με την μελέτη «φαινομένων» που σχετίζονται με το τυχαίο όπως τα αποτελέσματα της εκτέλεσης πειραμάτων τύχης παράλληλα με την ανάπτυξη μέρους της μαθηματικής γνώσης που σχετίζεται με αυτά.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Στο Δημοτικό οι μαθητές έχουν εμπλακεί[9] με πειράματα τύχης, διερεύνηση των αποτελεσμάτων τους και με την έννοια του δειγματικού χώρου. Εκφράζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου περιγραφικά (αδύνατο, βέβαιο κ.λπ.), αριθμητικά ως κλάσμα, δεκαδικό ή ποσοστό και την αναπαριστούν στην αριθμογραμμή στο διάστημα μηδέν – ένα και με κλίμακα από αδύνατο έως βέβαιο ενδεχόμενο. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως το κλάσμα (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων)/(πλήθος δυνατών περιπτώσεων), για ισοπίθανα ενδεχόμενα και τη συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης για μικρό και μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές θα εμπλακούν με:

- το συστηματικό προσδιορισμό των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης μέσω δενδροδιαγραμμάτων , πινάκων διπλής εισόδου κ.λπ. και την περιγραφή τους με διάφορους τρόπους όπως οι λίστες (π.χ. ΚΚΓΚ)
- τον υπολογισμό πιθανοτήτων βασιζόμενοι στις προηγούμενες μεθόδους
- τη χρήση και κατανόηση σύνθετων εκφράσεων όπως για παράδειγμα «τουλάχιστον..», «το πολύ..», «… ή …» κ.λπ., για σύνθετα ενδεχόμενα
- προσομοιώσεις πειραμάτων τύχης που θα τους επιτρέψουν να κατανοήσουν πτυχές του νόμου των μεγάλων αριθμών.

Στην Γ΄ τάξη θα εμπλακούν με:

- τη διάκριση ανάμεσα σε ασυμβίβαστα και όχι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα
- τη διάκριση ανάμεσα σε ανεξάρτητα και εξαρτημένα ενδεχομένων
- τη βασική αρχή απαρίθμησης και τη χρήση της για τον υπολογισμό πιθανοτήτων (π.χ. για την εύρεση του πλήθους όλων των δυνατών αποτελεσμάτων αν ρίξουμε ένα νόμισμα επτά φορές συνεχόμενα)

---

[9] Ο διδάσκων θα πρέπει να λάβει υπ' όψη ότι όσα αναφέρονται στην ενότητα αυτή σχετίζονται με το συγκεκριμένο ΠΣ. Με βάση το προηγούμενο ΠΣ τα πειράματα τύχης και έννοια της πιθανότητας δεν αποτελούσαν αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο Δημοτικό, ενώ με το νέο ΠΣ ξεκινάει από το νηπιαγωγείο και την Α΄ Δημοτικού.

Στο Λύκειο οι μαθητές θα εμπλακούν με τον λογισμό των πιθανοτήτων.

Δυσκολίες των μαθητών: Μέρος των δυσκολιών που ενδέχεται να έχουν οι μαθητές, μπορεί να έχουν ως αιτία το ότι κάποιες από τις ιδέες που σχετίζονται με τις πιθανότητες και το τυχαίο είναι ενάντια στην διαίσθηση, σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι συμβαίνει με ιδέες και έννοιες σε άλλες περιοχές των μαθηματικών.. Για παράδειγμα. πολλοί μαθητές υποστηρίζουν ότι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να έρθει η ένδειξη γράμματα (Γ), στην επόμενη ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος, όταν ήδη το έχουμε ρίξει 4 φορές και έχει έρθει ΚΚΚΚ.

Ένα άλλο σημείο δυσκολίας έχει να κάνει με την εύρεση του δειγματικού χώρου. Για παράδειγμα, όταν ρίχνουμε δύο ζάρια μπορεί να μην είναι εντελώς ξεκάθαρο στους μαθητές, ότι οι ενδείξεις «δύο στο ένα ζάρι και πέντε στο άλλο» μπορούν να προκύψουν με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Κάποιες από τις δυσκολίες επίσης μπορεί να συνδέονται με δυσκολίες που αφορούν άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα τα κλάσματα, όταν κάνουν σύγκριση πιθανοτήτων και η έννοια του λόγου και της αναλογίας. Για παράδειγμα. όταν τους ζητάμε τη γνώμη τους «αν θα έπαιζε ρόλο ποια σακούλα θα διαλέγαμε ώστε να είναι πιο πιθανό να επιλέξουμε μέσα απ' αυτή μία μαύρη μπάλα , όταν η σακούλα Α έχει 3 μαύρες και 2 άσπρες μπάλες και η σακούλα Β έχει 300 μαύρες και 200 άσπρες» αρκετοί μαθητές υποστηρίζουν ότι η επιλογή της σακούλας Β εξασφαλίζει μεγαλύτερη πιθανότητα, γιατί υπάρχουν περισσότερες μαύρες μπάλες απ' ότι στην σακούλα Α ή περισσότερες μαύρες από άσπρες στην σακούλα Β απ' ότι στην Α.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν με δραστηριότητες εκτέλεσης πειραμάτων τύχης , καταγραφής και επεξεργασίας των αποτελεσμάτων τους εργαζόμενοι σε ομάδες, σύγκρισης των αποτελεσμάτων ανάμεσα στις διαφορετικές ομάδες κ.λπ. Κάτι τέτοιο θα βοηθήσει εκτός από την ανάπτυξη και κατανόηση θεμάτων που σχετίζονται με τις πιθανότητες και τη σύνδεση με άλλες ενότητες όπως για παράδειγμα η στατιστική. Τα πειράματα τύχης μπορούν να γίνουν με τη χρήση «φυσικών αντικειμένων» (ζάρια, τροχοί τύχης, νομίσματα, σακούλες με ίδιες μπάλες διαφορετικών χρωμάτων κ.λπ.). Επίσης μπορούν να γίνουν με προσομοιώσεις σε μικρό χρονικό διάστημα με τη βοήθεια νέων τεχνολογιών κάτι που προσφέρεται ιδιαίτερα για κάποιες καταστάσεις. Π.χ. η εκτέλεση ενός πειράματος για μικρό και μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, μπορεί να αναδείξει ιδιότητες όπως ο νόμος των μεγάλων αριθμών. Η σύνδεση όμως ανάμεσα στο πείραμα τύχης με φυσικά υλικά και με προσομοίωση μπορεί να μην είναι προφανής σε όλους τους μαθητές και ίσως πρέπει να γίνει από τον διδάσκοντα.

Επίσης το ότι κάποιες καταστάσεις, ενώ είναι διαφορετικές ως διαδικασίες είναι ισοδύναμες μαθηματικά, είναι κάτι που ο διδάσκων πρέπει να το θίξει ρωτώντας τους μαθητές τι πιστεύουν σχετικά με αυτό. Για παράδειγμα, ο αριθμός για την ένδειξη κεφάλι κατά τη διαδοχική ρίψη ενός νομίσματος 20 φορές και κατά την ταυτόχρονη ρίψη 20 νομισμάτων.

Δεν αποτελεί μέρος των ΠΜΑ η ανάπτυξη συνολοθεωρητικών συμβολισμών. Η γραφή σύνθετων ενδεχομένων θα γίνεται με την χρήση της φυσικής γλώσσας, αφού αυτό που έχει σημασία είναι η κατανόηση του νοήματος των εκφράσεων και όχι ο μαθηματικός συμβολισμός τους.

Η δημιουργία δενδροδιαγραμμάτων, όταν είναι δυνατό, καθώς και πινάκων διπλής εισόδου μπορούν να αποτελέσουν βασικά εργαλεία με τα οποία θα υπολογίζουν πιθανότητες οι μαθητές.

Η διάκριση ανάμεσα σε ασυμβίβαστα ή όχι ενδεχόμενα και ανάμεσα σε ανεξάρτητα ή όχι ενδεχόμενα στην Γ΄ τάξη θα γίνει με χρήση παραδειγμάτων. Ο στόχος είναι να διακρίνουν τις δύο έννοιες μεταξύ τους, καθώς και την κάθε έννοια και την αντίθετή της. Είναι σημαντικό οι μαθητές να προσπαθήσουν να δημιουργήσουν δικά τους παραδείγματα και να εξηγήσουν τις επιλογές τους.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου: (ΠΜΑ: Π1, Π2, Π3)

Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε ομάδες και προσπαθούν να βρουν αν είναι λιγότερο ή περισσότερο ή το ίδιο πιθανό να έρθουν οι ενδείξεις ΚΚΚΚ ή οι ενδείξεις ΚΚΓΚ όταν ρίξουμε ένα «δίκαιο» (ή αμερόληπτο) νόμισμα διαδοχικά 4 φορές. Η προσπάθεια εξήγησης και αιτιολόγησης της απάντησής τους θα οδηγήσει στην αναζήτηση του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης για την εύρεση της πιθανότητας του κάθε ενδεχομένου. Συζητούν ανά ομάδα διάφορες μεθόδους με τις οποίες μπορούν να επιτύχουν κάτι τέτοιο και μετά με το σύνολο της τάξης. Προσπαθούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές που ακολούθησαν και να δικαιολογήσουν γιατί είναι σίγουροι ότι προσδιόρισαν όλα τα δυνατά αποτελέσματα. Η ανάγκη ενός συστηματικού τρόπου προσδιορισμού όλων των δυνατών αποτελεσμάτων και οι ιδέες των μαθητών θα δώσουν την ευκαιρία στον διδάσκοντα να εισάγει το δενδροδιάγραμμα ως μία τέτοια μέθοδο. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το δενδροδιάγραμμα. Απαντούν και αιτιολογούν το αρχικό ερώτημα. Επίσης δικαιολογούν αν κάποια από τις άλλες ενδείξεις π.χ. ΓΚΓΚ είναι πιο πιθανή από τις προηγούμενες. Υπολογίζουν πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων με βάση το προηγούμενο πείραμα τύχης και εξηγούν τους τρόπους με τους οποίους εργάστηκαν. Μετά τα προηγούμενα συζητούν για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που έχει η μέθοδος με το δενδροδιάγραμμα και τι πληροφορίες προσφέρει.

Διεργασία επικοινωνίας

Διεργασία επιχειρηματολογίας

Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας

Α΄ Γυμνασίου: ΠΔ2 (ΠΜΑ: Π4)

Στόχος της δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι όταν αυξάνει ο αριθμός των εκτελέσεων ενός πειράματος τύχης, τότε η σχετική συχνότητα τείνει προς τον αριθμό που υπολογίζουν ως το κλάσμα του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων. Αντίθετα τα δύο αποτελέσματα μπορεί να είναι πολύ διαφορετικά για μικρό αριθμό εκτελέσεων του πειράματος. Σημαντικό είναι οι μαθητές, στην αρχή του πειράματος, να έχουν υπολογίσει ποια είναι η πιθανότητα να σταματήσει ο δείκτης στο κάθε χρώμα, ώστε στο τέλος να μπορέσουν να αποδώσουν ένα πληρέστερο νόημα στην πρόταση π.χ. «η πιθανότητα ο δείκτης να σταματήσει στο μπλε είναι ¼».

Γ΄ Γυμνασίου. ΠΔ3 (ΠΜΑ: Π3)

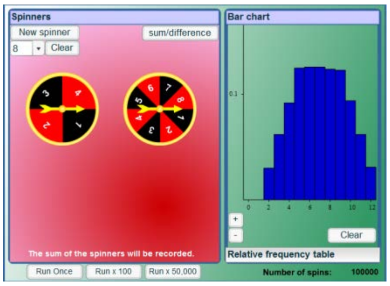
Η δραστηριότητα παρουσιάζεται σε ένα πλαίσιο που είναι προσιτό σε όλους τους μαθητές. Στόχος της είναι να μπορέσουν να βρουν τους τρόπους με τους οποίους θα απαριθμούν όλα τα δυνατά αποτελέσματα που προκύπτουν μέσα από διαδικασίες που χωρίζονται σε επιμέρους φάσεις. Οι μαθητές συνδέουν την διαδικασία που προκύπτει από την δραστηριότητα με τη μέθοδο του δενδροδιαγράμματος.

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων

Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές θα αναλύσουν και θα εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσουν την πιθανότητα να έρθουν ίδιες ενδείξεις αν ρίξουμε 10 νομίσματα ταυτόχρονα.

Εκπαιδευτικό υλικό: Με προϋπόθεση τη συμβατότητα με τα ΠΜΑ, μπορούν να αξιοποιηθούν τμήματα από το υπάρχον σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου κεφ. 5) και το βιβλίο καθηγητή.
Επίσης με την ίδια προϋπόθεση μπορούν να αξιοποιηθούν από το διαδίκτυο:

- Το υλικό που έχει παραχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου: http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html
- Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό που έχει παραχθεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε παιδιά της Μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης: http://www.museduc.gr/index.php?page=2&sub=124b
- Δραστηριότητες σχετικά με το άθροισμα ή την διαφορά αριθμών (από το 2 έως το 15) με την χρήση τροχών τύχης (2 έως 4 σε αριθμό).



http://nrich.maths.org/6033

- Προσομοίωση ταυτόχρονης ρίψης νομισμάτων ή ζαριών (2 έως 16):
  http://www.random.org/coins/
  http://www.random.org/dice/

Συνθετική Εργασία Γ΄ Κύκλου

Β΄ Γυμνασίου: Αναζητώντας το λάθος του γραμμωτού κώδικα (συνθετική εργασία 5)

Η εργασία αναδεικνύει σχέσεις και συνδέσεις μεταξύ προγενέστερων γνώσεων των μαθητών και δίνει έμφαση στα σημεία που σηματοδοτούν την «αλλαγή επιπέδου». Προτείνει υποδειγματικές μαθησιακές διαδρομές και συνδέει τη μαθησιακή διαδικασία με την αξιολόγησή της. Ενσωματώνει λειτουργικά και ουσιαστικά τις νέες Τεχνολογίες.

Θέμα: Μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα ανάλογων ποσών οι μαθητές θα εισαχθούν και θα μελετήσουν τις γραμμικές συναρτήσεις ψ=αχ και ψ=αχ+β, χρησιμοποιώντας το λογισμικό Function Probe (FP) ένα δυναμικό εργαλείο αλγεβρικής έκφρασης.

Πλαίσιο εφαρμογής: Η συνθετική εργασία προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο διδάσκων θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να διευκολύνει την επιχειρηματολογία και να προκαλεί συζητήσεις με όλη την τάξη. Προτείνεται η χρήση του σχολικού εργαστηρίου με 10 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν να εργαστούν οι μαθητές σε ομάδες. Αν οι μαθητές δεν έχουν προηγούμενη εμπειρία με το λογισμικό FP προτείνεται άλλη μία ώρα με απλές δραστηριότητες που θα βοηθήσουν τους μαθητές να εξοικειωθούν με βασικές λειτουργίες του λογισμικού. Επίσης προτείνεται άλλη μία διδακτική ώρα για την αξιολόγηση της παρέμβασης ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, ως προς τη διαδικασία υλοποίησης και ως προς τη συνεργατική οργάνωση της τάξης. Ανάμεσα στις φάσεις υλοποίησης της συνθετικής εργασίας ο διδάσκων μπορεί να χρησιμοποιήσει επιπλέον διδακτικές ώρες για την εμπέδωση των εννοιών και επιπλέον επίλυση προβλημάτων χωρίς τη χρήση λογισμικού.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές γνωρίζουν: τη γραφική παράσταση μιας σχέσης αναλογίας, την έννοια του πίνακα τιμών, τη γραφική παράσταση συνάρτησης. Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν: τη λειτουργία του πίνακα τιμών του λογισμικού FP και ιδιαίτερα την συμπλήρωση μιας στήλης μέσω μιας άλλης, την αλλαγή κλίμακας σε ένα γράφημα, τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων, τη λειτουργία του μετασχηματισμού μιας γραφικής παράστασης και της μεταφοράς της με τα ειδικά εργαλεία που επιτρέπουν τον ελαστικό χειρισμό της. Η γνώση των λειτουργιών του λογισμικού θα διευκόλυνε τη διαδικασία διερεύνησης και θα ήταν επιθυμητή αλλά επειδή κάτι τέτοιο δεν είναι δεδομένο, υπάρχει βοήθεια χρήσης του λογισμικού στο φύλλο εργασίας.

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

1η φάση

Στον πίνακα τιμών του προβλήματος δίνονται 30 μετρήσεις βάρους-τιμής που όταν μεταφερθούν στο γράφημα βρίσκονται πάνω σε τέσσερις ευθείες, δηλαδή οι λόγοι των συντεταγμένων παρουσιάζουν συνολικά 4 διαφορετικά αποτελέσματα. Ένα από τα ζεύγη τιμών αντιστοιχεί σε ένα σημείο που δεν θα ανήκει σε καμία από τις τέσσερις προηγούμενες ομάδες ευθειών.

1η δραστηριότητα: Καθώς οι μαθητές έχουν διδαχθεί στην προηγούμενη τάξη τη γραφική παράσταση των σημείων που αντιστοιχούν σε μια σχέση αναλογίας, αναμένεται ότι οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι τα σημεία με την ίδια σχέση αναλογίας είναι συνευθειακά με το σημείο (0, 0). Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν είναι δεδομένο ο καθηγητής γνωρίζοντας τις δυνατότητες της τάξης του θα κρίνει αν θα πρέπει να γίνει πριν την εφαρμογή της συνθετικής εργασίας μία σύντομη επανάληψη στα ανάλογα ποσά και στη σχέση αναλογίας.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων

Μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη

2η δραστηριότητα: Μέσω του μετασχηματισμού της ευθείας ψ=χ οι μαθητές θα ανακαλύψουν τέσσερις ομάδες συνευθειακών σημείων ενώ συγχρόνως το λογισμικό τους δίνει τη δυνατότητα να εντοπίσουν και τις εξισώσεις των τριών ευθειών που προκύπτουν: y=0,7x , y=1,4x, y=2,3x και y=3,2x.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση

3η δραστηριότητα: Οι μαθητές θα διαπραγματευτούν πιθανόν δύο τρόπους με τους οποίους πλέον μπορούν να απαντήσουν στο ερώτημα. Ο ένας τρόπος είναι ο αριθμητικός (πίνακας τιμών) και ο άλλος τρόπος είναι μέσω της γραφικής παράστασης και του μεμονωμένου σημείου (γεωμετρικός). Ξέροντας ότι πρόκειται για υπερτιμολόγηση τα ενδεχόμενα είναι δύο. Ή η λάθος τιμή είναι το σημείο (4, 3,28) οπότε θα έπρεπε να ανήκει στην y=0,7x, ή αυτή η τιμή είναι σωστή και έχουν υπερτιμολογηθεί όλα τα σημεία που ανήκουν σε μία από τις τρεις υπόλοιπες ευθείες. Τότε όμως η τιμή ανά κιλό θα ήταν 0,82 ευρώ κάτι που απορρίπτεται από τα δεδομένα του προβλήματος.

Διεργασίες διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων

4η δραστηριότητα: Με προσαρμογή του εργαλείου μέτρησης κλίσης πάνω στις ευθείες οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι ο λόγος της διαφοράς των τεταγμένων προς τη διαφορά των τετμημένων των δύο σημείων είναι ίσος με το συντελεστή του χ (η τιμή ανά κιλό του κάθε προϊόντος). Αν οι μαθητές έχουν διδαχθεί την εφαπτομένη γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ο διδάσκων μπορεί με κατάλληλες ερωτήσεις να συνδέσει το α με την γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα χ΄χ.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση

5η δραστηριότητα: Μ΄ αυτή τη δραστηριότητα κλείνει αυτή η φάση του προβλήματος προτείνοντας έναν εποπτικό τρόπο ελέγχου των τιμών που αποτυπώνει η ζυγαριά στο γραμμωτό κώδικα. Με τη βοήθεια του λογισμικού θα φτιαχτούν πολύ γρήγορα τα 100 πιθανά βάρη και οι αντίστοιχες τιμές τους. Στη συνέχεια με αποστολή των σημείων στο γράφημα θα διαπιστωθεί ότι αυτά θα «πέσουν» πάνω στις υπάρχουσες ευθείες. Έτσι, επιδιώκεται να γίνει περισσότερο κατανοητή από τους μαθητές η επιλογή να συνδεθούν τα σημεία στο γράφημα και να αναφερόμαστε πλέον σε ευθείες κι όχι σε σύνολα συνευθειακών σημείων.

Διεργασία ενδομαθηματικών συνδέσεων

Χρήση ψηφιακών εργαλείων, διερεύνηση και μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη

Προστιθέμενη αξία: Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό θα εξοικονομήσουν πολύτιμο χρόνο καθώς θα έχουν τη δυνατότητα να εκτελέσουν εύκολα μια σειρά από χρονοβόρες ενέργειες όπως να αντιγράψουν τις δύο στήλες δεδομένων από το επεξεργαστή κειμένου στον πίνακα τιμών, να κάνουν αυτόματα τη διαίρεση της τιμής με την ποσότητα για όλες τις πωλήσεις, να γεμίσουν μία γραμμή του πίνακα με πολλές τιμές βάρους και να υπολογίσουν την τιμή τους. Η δυνατότητα μετασχηματισμού μιας συνάρτησης και η αποτύπωση του αντίστοιχου τύπου θα διευκολύνει τη μετάβαση από τα ανάλογα ποσά στη σχέση αναλογίας. Η δυναμική σύνδεση των παράθυρων του λογισμικού όπως η αποστολή σημείων του πίνακα τιμών στο γράφημα και αντίστροφα θα βοηθήσει στην κατανόηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων της συνάρτησης.

2η φάση

1η δραστηριότητα: Οι μαθητές αναμένεται να ανακαλέσουν την έννοια της συνάρτησης ως μία σχέση δύο μεταβλητών όπου σε κάθε τιμή του χ το ψ παίρνει μοναδική τιμή και να αναγνωρίσουν ότι μία τέτοια σχέση είναι συνάρτηση ακόμα και στην περίπτωση που το α είναι 0.

Διεργασίες ενδομαθηματικών συνδέσεων, γενίκευσης και αιτιολόγησης

2η δραστηριότητα: Αναμένεται ότι οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι οι ευθείες διέρχονται από το (0,0) και ότι αν θέσουν την τιμή 0 στο χ θα βρουν ότι και το ψ είναι 0, ανεξάρτητα από την τιμή του α.

Διεργασία διερεύνησης και γενίκευσης

3η δραστηριότητα: Αναμένεται οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι όταν ο συντελεστής διεύθυνσης είναι θετικός, η ευθεία βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο ενώ όταν είναι αρνητικός βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση, επικοινωνία και διατύπωση υποθέσεων

4η δραστηριότητα: Εδώ οι μαθητές θα «ανακαλύψουν» ότι όταν το χ αυξάνεται κατά 1, τότε το ψ μεταβάλλεται κατά α.

5η δραστηριότητα: Η αίσθηση ότι οι μαθητές παίζουν παιχνίδι εκτιμάται ότι θα ενεργοποιήσει ιδιαίτερα τους μαθητές για να φτάσουν στην πιο σύντομη λύση. Έχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν με πολλούς τρόπους για να βρουν την εξίσωση της ευθείας. Για παράδειγμα, ίσως κάποιοι επιλέξουν α) να πειραματιστούν με το σχεδιασμό διαφόρων ευθειών με στόχο να περνούν από κάποιο συγκεκριμένο σημείο, β) να κατασκευάσουν την ψ=χ και να την περιστρέψουν ώστε να περνάει από το σημείο αυτό, γ) να μεταφέρουν τις συντεταγμένες του σημείου στον πίνακα τιμών και να βρουν το λόγο της τεταγμένης προς την τετμημένη ώστε να βρουν την κλίση της ευθείας, δ) να βρουν την κλίση χρησιμοποιώντας το εργαλείο μέτρησης κλίσης, ε) να βρουν τη λύση αλγεβρικά θέτοντας στην ψ=αχ τις συντεταγμένες του σημείου κ.ά. Ο διδάσκων μετά το πέρας του παιχνιδιού θα πρέπει να αναδείξει όλες τις ιδέες των μαθητών και να υποστηρίξει ένα διάλογο για το ποιος τρόπος (ή τρόποι) είναι πιο σύντομος και ακριβής.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση

6η δραστηριότητα: Στην περίπτωση που το σημείο ανήκει στον άξονα ψ΄ψ αναμένεται από τους μαθητές να αναγνωρίσουν ότι δεν ορίζεται μία τέτοια συνάρτηση. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αναδείξει στην ολομέλεια της τάξης τη συγκεκριμένη άποψη και να ζητήσει από τους

Διεργασίες επικοινωνίας, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων μαθητές την τεκμηρίωσή της. Δύο βασικά επιχειρήματα μπορεί να προέλθουν με χρήση του ορισμού της συνάρτησης (δύο τουλάχιστον τεταγμένες έχουν την ίδια τετμημένη) ή με αντικατάσταση των συντεταγμένων του σημείου στην εξίσωση ψ=αχ.

Διεργασίες συλλογισμού και επιχειρηματολογίας

7η δραστηριότητα: α) Εδώ αναμένεται από τους μαθητές να συμπληρώσουν στον πίνακα τιμών μία στήλη χρησιμοποιώντας τη δυνατότητα του λογισμικού γεμίσματος μιας στήλης με αριθμούς, αφού έχουν ορίσει την αρχική τιμή, την τελική τιμή και το βήμα άθροισης. Στη συνέχεια θα υπολογίσουν τη δεύτερη στήλη γράφοντας στην δεύτερη γραμμή την αντίστοιχη συνάρτηση, ενώ η τρίτη στήλη θα υπολογιστεί ως πρόσθεση σε κάθε στοιχείο της προηγούμενης στήλης του αριθμού 0,5.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων

β) Εδώ οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι οι δύο ομάδες σημείων φαίνεται να δημιουργούν δύο παράλληλες ευθείες. Στη συνέχεια θα βρουν τους τύπους των δύο συναρτήσεων και θα κατασκευάσουν τη γραφική τους παράσταση ώστε να επαληθεύσουν την ορθότητα των δύο τύπων (από την εφαρμογή τους στις ομάδες σημείων) και να γενικεύσουν τη σχετική θέση των δύο συναρτήσεων.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων, μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη

γ) Αναμένεται από τους μαθητές να αναγνωρίσουν ότι η ευθεία ψ=αχ+β είναι μεταφορά της ψ=αχ κατά β στον άξονα ψ΄ψ τον οποίο τέμνει στο σημείο (0,β).

Χρήση ψηφιακών εργαλείων, διατύπωση υποθέσεων και γενίκευση

δ) Εδώ καλούνται οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη γνώση τους για το ρόλο των α και β. Αναμένεται ότι οι μαθητές θα τοποθετήσουν πρώτα το σημείο (0,β) γνωρίζοντας το ρόλο του β και στη συνέχεια το σημείο (1, β+α) γνωρίζοντας ότι το α δείχνει πόσο μεταβάλλεται το ψ όταν το χ αυξάνεται κατά 1.

Προστιθέμενη αξία: Ο κατακόρυφος μετασχηματισμός της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης στο FP θα βοηθήσει τους μαθητές να διερευνήσουν άμεσα το ρόλο του πρόσημου του α στη γραφική παράσταση της ψ=αχ. Επίσης, η δυνατότητα επιλογής σημείων πάνω σε μία γραφική παράσταση, η αποστολή των συντεταγμένων τους στον πίνακα τιμών και ο αυτόματος υπολογισμός της διαφοράς των τεταγμένων θα βοηθήσει στη διερεύνηση του ρόλου του α σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της ψ=αχ.

3η φάση

Εδώ οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γνώση τους για τις γραμμικές συναρτήσεις και με τη βοήθεια του λογισμικού διερευνούν σύνθετα προβλήματα και εφαρμογές επιλύοντας εξισώσεις και ανισώσεις της μορφής αχ+β<(=,>)γχ+δ.

Σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο

1η δραστηριότητα: Εδώ αναμένεται οι μαθητές να εκφράσουν με τύπο συνάρτησης τα χρήματα ψ που θα πληρώσει κάποιος σε κάθε εταιρεία ως προς το χρόνο χ. Για την εταιρεία Α: ψ=9+0,1χ και για την εταιρεία Β: ψ=3+0,2χ.

2η δραστηριότητα: Εδώ οι μαθητές με τη βοήθεια του λογισμικού θα βρουν ότι το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων είναι το (60,15) και αναμένεται να αναγνωρίσουν ότι αν ο χρόνος ομιλίας είναι 60 λεπτά

Χρήση αναπαραστάσεων

τα μήνα τότε το κόστος και στις δύο εταιρείες είναι το ίδιο.

3η δραστηριότητα: Αναμένεται ότι οι μαθητές θα αναγνωρίσουν από τη γραφική παράσταση ότι μέχρι 60 λεπτά συνομιλίας μηνιαία συμφέρει η εταιρεία Β αφού βρίσκεται πιο «κάτω» από τη γραφική παράσταση της εταιρείας Α. Αντίστοιχα, για πάνω από 60 λεπτά αναμένεται να αναγνωρίσουν ότι συμφέρει η εταιρεία Α.

Διεργασίες συλλογισμούς και επιχειρηματολογίας

Προστιθέμενη αξία: Η δυνατότητα του λογισμικού να χαράσσει γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και να βρίσκουμε (με μεγέθυνση αν χρειάζεται) το σημείο τομής δύο συναρτήσεων, θα βοηθήσει τους μαθητές να λύνουν πραγματικά προβλήματα, να συνδέουν τις αντίστοιχες λύσεις με διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και να τις ερμηνεύουν στο πλαίσιο διαφορετικών καταστάσεων του πραγματικού κόσμου.